

江晓原 总主编

中外科学文化交流历史文献丛刊

研究之部

徐泽林 著

和算中源

和算算法及其中算源流



今有如图外圆内容春夏秋冬六圆只云春圆径三寸夏圆径四寸问秋圆径如何答曰八寸六分有奇



上海交通大學出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

江晓原 总主编

中外科学文化
交流历史文献丛刊·研究之部

本书从算法的角度，通过历史考证与数理分析，系统阐述日本传统数学（和算）在高次方程数值解法、非线性方程消元算法、函数插值法、高阶等差数列求和算法、同余式组解法、丢番图逼近法、函数加速逼近法，以及微积分算法等方面的成就，并追溯这些算法与中国传统数学（中算）中相应算法之渊源关系。揭示东亚传统数学的算法化精神与成就，由此论证中国传统数学可以向近代数学演进。

ISBN 978-7-313-08295-4

定价: 58.00元

江晓原 总主编

中外科学文化交流历史文献丛刊 研究之部

徐泽林 著

和算中源

和算算法及其中算源流



上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本书从算法的角度，通过历史考证与数理分析，系统阐述日本传统数学（和算）在高次方程数值解法、非线性方程消元算法、函数插值法、高阶等差数列求和算法、同余式组解法、丢番图逼近法、函数加速逼近法，以及微积分算法等方面的成就，并追溯这些算法与中国传统数学（中算）中相应算法之渊源关系。揭示东亚传统数学的算法化精神与成就，由此论证中国传统数学可以向近代数学演进。

图书在版编目（CIP）数据

和算中源：和算算法及其中算源流／江晓原主编；徐泽林著．—上海：上海交通大学出版社，2012（2013 重印）
（中外科学文化交流历史文献丛刊）
ISBN 978-7-313-08295-4

Ⅰ．①和…　Ⅱ．①江…②徐…　Ⅲ．①算法—数学史—中国
Ⅳ．①O112

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 067966 号

和算中源
——和算算法及其中算源流
徐泽林　著
上海交通大学出版社出版发行
（上海市番禺路 951 号　邮政编码 200030）
电话：64071208　出版人：韩建民
昆山市亭林印刷有限责任公司印刷　全国新华书店经销
开本：787 mm×1092 mm　1/16　印张：24.25　字数：368 千字
2012 年 11 月第 1 版　2013 年 1 月第 2 次印刷
ISBN 978-7-313-08295-4/O　　定价：58.00 元

江晓原 总主编

《中外科学文化交流历史文献丛刊》 研究之部

国家社会科学基金重大项目

“中外科学文化交流历史文献整理与研究”

批准号：10&ZD063

《中外科学文化交流历史文献丛刊》总序

江晓原

在现今“全球化”日益明显的时代，不同文化之间的交流、碰撞和融合正在加速进行。尽管各方对这一过程的终极价值判断大相径庭，甚至针锋相对，但是无论如何，各方所面临的对异域文化深入理解的任务都是无法回避的。而对于这一任务来说，历史上的中外交流则是其中必不可少的组成部分。

考虑到科学技术在今日社会中所扮演的特殊角色，研究历史上的中外科学技术交流就成为上述任务中一个特别迫切的部分。因为科学技术自身所形成的“进入门槛”，导致对于研究者的特殊要求——只有少数既受过正规科学技术训练，又具备史学素养的研究者，才能够有效从事这方面的研究；所以以往的中外交流史研究中，人文方面的交流已经取得了大量成果，但是对于历史上的中外科学技术交流，无论从史料整理、研究成果、社会影响等方面来看，相比这一领域自身的重要性，都是远远不够的。

就国内的情况而言，历史上的中外科学技术交流，直到上个世纪 80 年代，方才逐渐受到学术界较多的关注，逐渐积累了一定数量的研究成果。

多年来，我在上海交通大学科学史系的诸位同仁，俱以研究中外科学技术及文化交流为同行所瞩目，成果丰硕。本系教师历年来先后负责承担国家级及省部级研究项目约 30 项(包括已结项及在研)。且本系多年来培养了大批博士、硕士研究生，其中亦颇多以中外科技交流方向的课题为学位论文题目者。同仁咸以为，以本系为主要依托，团结各方力量，整合多年研究成果，完成一项中外科技交流历史文献集大成性质的整理研究工程，此其时

矣。于是遂有国家社会科学基金重大项目《中外科学文化交流历史文献整理及研究》之申报，并顺利获得资助立项。

此次项目团队的组建，广泛团结国内外各处在科学技术史方面学有专长之研究人员，以上海交通大学科学史系师生为主干，包括了中国科学院自然科学史研究所、清华大学、北京大学、巴黎第七大学、华东师范大学、东华大学、上海师范大学、内蒙古师范大学、上海中医药大学、河南大学、广西民族大学、淮阴师范学院、咸阳师范学院等14个单位的数十位研究人员。

本项目旨在对历史上传入中国之各种域外科学文化，以及中国科学文化向周边汉文化圈输出的相关中文历史文献和典籍，进行全面整理和研究。年代跨度起于汉末，迄于晚清。拟着重收集、整理以下几方面的历史文献：自汉末至宋初随佛教传入中国的包含天文、历法等域外知识的文献，元代随伊斯兰教传入中国的阿拉伯天文学、数学文献和典籍，明清之际随基督教传入中国的欧洲古典天文学、数学、物理学等典籍，晚清传入中国的西方近现代科学典籍，中国科学向周边世界传播的汉文历史文献。

本项目具有科学史、历史学、中外文化交流史等多方面的学术价值，能够为未来的深入研究提供完备的史料集成。

通过建设这一中外科学技术交流的史料集成，以及借助这一史料集成所展开的在这一领域全方位的深入，可望将历史上中外科学技术交流的研究大大提升一个层级和档次，并使中国研究者在国际学术界获得更多的发言权。

从更为广泛的意义上来看，值此中国和平崛起之际，本项目在扩大中国文化影响、增加中国文化软实力方面的现实意义，亦将越来越明显。

本项目下设七个子课题：

1. 汉译佛经与道藏中的天文历法文献整理与比较研究(上海交通大学钮卫星教授负责)

对汉译佛经与道藏中的天文历法作比较研究。在古代世界各种文明之间存在着各种各样的文化交流，而科学技术、宗教教义和文学艺术等都是文化交流的主要内容。以佛教为载体，向中土传入了不少印度、巴比伦和希腊天文学和历法知识。这一传播从东汉末年一直延续到北宋初年，并在唐朝

达到一个高潮。到中晚唐时期，佛教的输入又转变为以注重祈攘、消灾，讲究仪式、仪轨的密教为主，为达到所谓的消弥灾难的目的，在技术上更加依赖天文学手段，因此该时期的佛经中保存有相当丰富的天文学内容。无论从佛学角度或科学史角度，或从探究宗教与科学之关系的角度，乃至从文献校勘的角度，对这些佛教经典中的天文学内容都有必要进行详细的梳理和考证。在以往的研究基础上，对佛教和道教经典中所包含的天文学内容进行一次整体的和梳理和考察，并对这些天文学内容做出恰当的评述，以期对这些传入中国的域外天文学内容进行全面、系统的研究，并追溯这些天文学的来源，考察这些天文学内容对中国本土天文学文化甚至本土文化所产生的影响。

2. 中西方天文历法交流重要古籍整理与比较研究（东华大学邓可卉教授负责）

侧重对于古代中西天文历法交流文献进行整理和比较研究，并整理研究相关的重要历史文献，时间跨度为秦汉之际至鸦片战争。基于明清之际西方天文学第一次大规模传入中国并且中西方科学文化开始正面交流这个历史事实，通过详细考证此期中西天文学碰撞、交流直至融合的历史背景，梳理并研究明清之际的数理天文学文献，并兼及中国和希腊、中国和阿拉伯天文历法交流和比较研究。这不仅对于传统数理天文学的研究有益，而且对现代科学的可持续发展具有重要的启示作用。

3. 古代中外生化医学外交流文献整理及比较研究（上海交通大学孙毅霖教授负责）

在古代中外生化医学交流方面，这个领域中的许多早期历史文献，曾长期湮没于宗教、方术等史料中，有些甚至被妖魔化或污名化。而这些文献背后的中外交流，也颇多未发之覆。而一些晚期的文献，则有流传海外或仍以手稿形式存世者，皆急需进一步研究整理。中国古代有很多典籍在不同历史时期、通过不同途径流传到海外，其中不少在国内逐渐失传，以至学人需从海外求索。特别是流传到海外的中国科技典籍，迄今尚无人专门搜集及整理出版。其中有不少涉及中国古代重要的科技发明或者科技史上的重要事件，对于研究中国古代科学技术至关重要，但国内或者没有存本，或者仅

有残本。在流落海外的珍稀中国科技典籍中,还有一批由清初在华传教士写成的著作,其中不少是他们用于教授皇帝、皇子和宫廷科学家的讲义,是中西科技交流史上的重要文献。由于种种原因,这些著作没有得到出版,仅以手稿形式存世。凡此种种,都是中国科技史上的重要文献,但又是国内绝大多数研究者所不知道的,甚至国外研究者也难以入手。对它们进行抢救性整理,并进行比较研究,不仅在保护古代科技文化遗产、弘扬中国古代科技文明成就等方面具有重要意义,对世界范围内的科技史研究者来说,都是一件功德。

4. 明末清初耶稣会士数理科学译著的整理与研究(上海交通大学纪志刚教授负责)

近年中外文化交流日益广泛,学者们研究视角拓展到早期中西交流的历史边界,但早期交流的原典仍散落各处,难窥全豹。就明末清初耶稣会士传入的数理科学译著而言,与这一领域已有的较多研究成果相比,相应的历史文献整理显得非常落后,这是一个相当令人惊奇的现象。这一时期浩繁的中外科学技术交流文献(包括中文的与外文的),大量以刊本、稿本、善本、珍本的形式深藏在中外各图书馆中,使一般的研究者无缘得见。故该子课题主要整理此一时期的历算译著,并兼及其他。

5. 中西物理学及工艺技术交流历史文献整理研究(上海交通大学关增建教授负责)

从鸦片战争结束至民国初期,这段时间西方科学的传入,使中国社会开始大规模的接触西方近代科学,中国从此开始了由古代社会向近现代社会转型的新的历史阶段。该子课题从文献着手,对历史上中外科技交流的历史文献进行整理研究。由于在西方科技传入的过程中,物理和工艺(包括兵器技术)历来扮演着重要角色,该子课题主要着眼于这两个学科,梳理这段时间由西方传入的物理工艺著作,理清数目,考订文本,将其整理点校,汇集出版,建立起研究这段中外科技交流史可信的文献资料库,为全国同道提供可资借鉴的第一手研究资料,使得中国近代史的研究在中外科技文化交流领域从此能够建立在坚实的史料基础之上。同时对这些文献本身的内容和历史价值进行研究,丰富中国近代史的内容。

6. 近现代中外生化医学交流文献整理及比较研究(淮阴师范学院蒋功成教授负责)

由明末清初延续到今的近代西方生物科学知识向中国的传播，文献类型多、传播范围广，并通过多样化的渠道进入到普通中国人的生活中，产生的影响非常复杂，有许多未曾发掘和整理的文献资料。而且，要了解这些学科知识对于中国社会与科学发展的影响，不能仅仅靠一些经典文本的传播作为代表，还需要关注到其他非专业文本中的科学知识。通过相关史料的整理，我们可以对于近现代生物学、化学交流文献的基本情况有一个全面的了解，并发掘、抢救和整理一些容易散失的重要科学文献，为以后学者进一步的研究打下基础，并理解不同的历史文化背景对于科学发展的影响特点。

7. 汉字文化圈科学文化交流的历史文献整理与研究(东华大学徐泽林教授负责)

在中外文化交流史上，朝鲜半岛、日本、越南等汉字文化圈国家受中国文化的影响最深。各历史时期中国传统科技典籍不断传入这些国家，对这些国家的传统科学文化产生重要影响，乃至于中、日、韩(朝)、越形成共同的科学文化圈。目前，有大量的中国传统科技典籍保存于这些国家的各类图书馆，还有不少科技典籍在这些国家被翻刻、训解，它们不仅是中国传统科技文化传播的历史遗迹，也是对某些典籍在中国本土失传或中外版本差异的补遗。另一方面，由于传统的东亚科学编史都是立足于本位立场的国别科学史编纂，缺乏对汉字文化圈科学史的整体认识与全面的史料调查，从而汉字文化圈科技文化交流中的历史文献传播与现存情况尚需全面调查，通过详细调查历史上汉字文化圈科技典籍的传播情况，由此而反映中国传统科学文化对周边国家科学文化的影响。该子课题调查和研究中国传统科技典籍在日本、韩国(朝鲜)、越南的流传与影响，并将全面深入到韩国科学、越南科学的内部，研究各种汉籍科技著作及其影响下的外域著作的具体内容、科学方法、思想动机等细节问题，用分析、比较等方法研究日本、朝鲜、越南传统科学的内部机理及其与中国科学文化的联系及其自身发展。

就相关的历史文献整理而言，上个世纪 90 年代由河南教育出版社(即现在的大象出版社)陆续出版《中国科学技术典籍通汇》，对中国古代科学技术

文献作了初步的收集和整理，是一个值得重视的成果，筚路蓝缕，功不可没。但《中国科学技术典籍通汇》并不着眼于中外交流，而且对文献采用影印之法，并无点校整理。此外也有一些零星的相关成果问世或即将问世。但就总体而言，在历史上的中外科学文化交流方面，如此规模的历史文献整理，在国内是前所未有的。

就学术研究而言，则本项目所团结的研究团队，数十位成员的研究成果，几乎覆盖了古代中外科技交流的整个领域。依托这样的团队进行相关的历史文献整理和研究，方能建立在学术研究的基础之上，超越通常的古籍整理层次。

本项目的最终成果，将以两种形态汇集出版：

其一是一系列历史文献的点校本，定名为《中外科学文化交流历史文献丛刊》"文献之部"。这一部分将成为一套具有多方面学术意义的历史文献集，可望为各相关领域的研究提供方便。

其二是一系列研究著作——既有独立的学术专著，也有研究论文集，它们构成《中外科学文化交流历史文献丛刊》的"研究之部"。

中间阶段当然还将发表一系列研究性质的高质量学术论文。最后将提交本重大项目的总体研究报告。该总体研究报告将作为"总论"卷，收入《中外科学文化交流历史文献丛刊》"研究之部"。

江晓原

2012 年 5 月 30 日

于上海交通大学

科学史与科学文化研究院

（前身为科学史与科学哲学系）

序

17 世纪，日本传统数学发生了质的飞跃。以关孝和、建部贤弘等为代表的和算（Wasan）家们在中国古代割圆术与招差法的基础上开创了可以看作是微积分前驱的“圆理”研究；通过对天元术的接受与改造发展了他们自己的多项式方程消元理论并导致了行列式的发明，等等。可以说：和算家们站在中国宋元数学家的肩膀上接近了近代数学的大门。

和算无疑是中国古代数学在丝绸之路东线绽放的一朵奇葩。关孝和、建部贤弘等和算家们的著述渗透着中国古代数学的营养，同时也闪耀着和算家们在中国传统数学基础上创新的火花。另一方面，和算终究没有跨越近代数学的门槛，明治维新之后被东渐的西方数学所替代，在数学史上留下了一个深刻的悬念和值得破解的谜题。因此，研究和算的兴衰及其与中国古典数学的关联，了解 17 世纪和算家们的创造性贡献、揭示中国古典数学的成就和势能、反思中国传统数学与和算各自由盛转衰的命运，是一个既有历史文化价值、又有现实借鉴意义的重要而引人的课题。

《和算中源——和算算法及其中算源流》正是一部探讨和算的发展及其中算渊源的力作。作者徐泽林教授是国内为数不多的和算史专家。他的博士论文《和算的中算基础及其与清代数学的比较》，即是一部和算史专著，其后长期致力于中国古代算法与和算算法的研究，在国内外科学史和数学史学术刊物上发表了一系列论文，本书是他多年丰硕成果的结晶，不仅使以往的研究系统化，同时汇集了作者在和算史领域的诸多发现和创见。作者对中国传统历算中的极值概念萌芽及其对和算“极数术”（极值算法）的影响之揭示，改变了日本数学史界的传统观点；关于建部贤弘的“累遍增约术”与 Romberg 算法（逐次半分数值加速逼近算法）的等价性之论证，发前人所未发，对现代数值计算亦有启发意义，显示了作者的现代数学修养和科学史洞

察力；特别是，本书从汉字文化圈的整体文化观，考察东亚地区无穷小算法的源流与走势，分析其成就与局限，为全面正确地理解近代数学的文化来源和思考“李约瑟难题”开阔了视野，提供了有新意的见解。

对原始文献的掌握是数学史研究的基本功。本书作者曾承担了吴文俊数学与天文丝路基金项目“中国传统数学传播日本的史迹调研”，深入日本多地大学和寺院的图书馆对和算史料进行了挖掘和整理，并编译了作为“丝绸之路数学名著译丛”之一的《和算选粹》。第一手史料无疑构成了作者研究成果的坚实基础。对原始文献的驾驭，加上作者的现代数学修养和敏锐的比较目光，两者的结合是能够在前人工作的基础上有所突破的关键。

数学史是一个题材广阔的领域，但要获得系统的、有深度的成果，则需要艰苦的探索和长期的积累，需要敬业乐道的境界。本书可以看作是中外数学交流与比较史研究的一个范例，当其付印之际，谨序致贺，更希望本书的出版能进一步推动国内中外数学交流与比较史的研究，涌现更多达到一定高度、具有一定纵深的学术专著。

中国科学院数学与系统科学研究院 李文林

2011年10月12日于北京中关村

前 言

世界文明中有很多文化类型，最主要者当属“欧洲基督教文化圈”、“东亚儒家文化圈”、“印度次大陆佛教文化圈”和“阿拉伯伊斯兰文化圈”。东亚儒家文化圈又称作汉字文化圈，指汉字的诞生地中国以及周边的越南、朝鲜、琉球、日本。这些地域主要是农耕民族，历史上的政治制度主要是册封体制，外交关系主要是宗藩关系与朝贡关系，历史上乃至今日完全使用或与本国文字混合使用汉字（日本称汉字为真名，本国文字为假名；韩国称汉文为真文，本国语言为谚文；越南称汉字为儒字，本国文字为喃字），古代官方及知识界多使用汉语文言文作为书面语言，即使在现代，韩国语、越南语和日本语的词汇中约5成至7成都是由古汉语派生出来的汉字词组成。汉字作为语言和文化的载体，使中国的儒家思想与传统学术传播和影响于这些地区。

中国传统数学自成体系，从先秦时期就开始了数学知识的不断积累，汉代以来，农耕社会与儒家文化环境决定了中国传统数学的价值核心在于“通神明，顺性命”与“经事务，类万物”两个层面，因此，中国传统数学强调具体性、实践性与实用性，从而形成了今天称之为“应用数学”的数学文化传统。它因重视实用，加之东方人习惯于归纳思维，所以通常把数学问题分为若干类（如方程、盈不足、勾股、大衍、垛积等），各类问题给出普遍算法——术，由“术”通过有限的机械性步骤，必能获得问题的解答，其“术”就是算法[1]。所以，汉字文化圈传统数学常常被称作“算术”，即“计算技术”的意思。

自汉唐时代起，中国数学文化就传播移植于周边地区，汉字文化圈的日

---

〔1〕 所谓算法(algorithm)，就是模型分析中的一组可行的、确定的、有限的规则。它可理解为由基本的运算以及规定的运算顺序所构成的完整的解题步骤，或者看成是按照要求设计好的有限步骤的、确定性的计算程序，并且这样的步骤和程序可以解决一类问题。

本、朝鲜、越南的数学文化在与西方文化接触乃至西化以前，其民族自主性与独立性还是很有限的。从16世纪中叶开始，西方文化渐渐进入东亚，汉字文化圈内各国科学文化的民族性也日益明显，在17～19世纪，东亚各国的数学文化在保持汉文化的根本性质的同时，也形成了自己的特色，尤其是远离大陆的日本数学文化，直至19世纪末20世纪初，随着东亚社会的变革与转型，东亚传统数学文化渐渐被西方数学文化所取代。

西方基督教文化进入东亚稍前，是东亚传统天文算学没落的时期，传统数学在大陆的发展衰微，明代普及以珠算为主的日用算术，宋元时期发达的数学成果在大陆几乎被遗忘。第一次西学东渐过程中，西方传教士把在远东的传教中心转移到儒文化中心——中国，在基督教文化冲击下，明末清初的中国数学受到西方科学文化的强烈冲击，中国数学家在"西学中源"思想支配下，致力于将所传西算融汇于中算，努力证明一切之西法皆出自中国，其数学工作大体上是在消化西方数学，对数学新知识的创造工作并不多见。乾嘉时期经学考据学风下对传统数学的注解性研究，或可说是经学的附属，与其说数学研究，还不如说是数学历史文献研究，从数学知识进化的观点来看，值得称赞的成果甚少。至19世纪末，西方数学渐成清代数学的主流。

日本江户时代(1603～1867)的和算家们幸运地获得了在中国本土几乎业已隐灭的宋元数学知识，《算学启蒙》(朱世杰，1299)、《杨辉算法》(杨辉，1274～1275)、《授时历》(王恂、郭守敬，1280)等著作，给江户时代和算的发展予以深刻影响，和算在很少受到西方数学影响下，沿袭东亚固有的文化传统继续发展。江户时代的町人文化环境孕育了艺道化的日本传统数学文化，导致和算出现形式化、技术化的倾向。和算是对宋元数学传统的发展，宋元数学的成果被和算家推向新的高度，其某些成果足可与牛顿(Isaac Newton，1642～1727)时代的欧洲近代数学相媲美。

宋元代数学内容包括天元术、四元术、演段法、开方释锁、垛积招差、大衍术等。关孝和(Seki Takakazu，1642? ～1708)将天元术改良成"旁书法"，后来由其弟子们发展成演段术或点窜术，使和算研究进入具有东方特色的代数分析时代，和算在中算基础上获得大量优秀成果正是由于使用了这种代数分析法。

与近代欧洲人关心代数方程的公式解法相异趣，东方人出于实际应用

的需要而关心代数方程的数值解法，这一传统由《九章算术》的“开方术”发展而来，至宋代发展成贾宪（11世纪）的“增乘开方术”与秦九韶（1202～1261）的“正负开方术”，构造了解高次方程数值解的机械化算法（即Horner法）。关孝和推广了《杨辉算法》中的开方法，对代数方程求解进行一般化、形式化的处理，独立地获得了“秦九韶算法程序”，同时也检讨了方程根的判别式、正负根存在条件、方程根与系数的关系以及方程变换等代数问题，并以逐次近似法求方程实数根。关孝和之后，开方术成为和算中最基本的数学内容和数学方法。宋元数学由于使用天元术而引起数学问题的形式化与复杂化，从而出现了求解多元高次方程组的消元演算（和算称作“解伏题”），和算家发展了以天元术为基础的消元理论，建立了解高次多元方程组的机械化方法，促进了和算沿几何代数化道路继续发展，作为消元算法的副产品，和算家在世界数学史上首次导入行列式展开法。

实数的有理逼近为中国古代历算中最重要的课题，汉代《三统历》中就使用了所谓的“通其率”算法，以计算五星的会合周期，南北朝时期何承天（370～447）又创立了“调日法”，用最佳渐近分数表示朔望月长度。为求历元（上元积年），中国历学家建立了解同余式组的算法，即“孙子定理”或“中国剩余定理”，南宋秦九韶将这一算法系统化，概括为“大衍术”与“演纪术”。在没有实数理论的背景下，约分、零约术、大衍求一术等实数有理逼近算法，与一次不定分析算法互为一体。这些丢番图逼近算法在和算中都有所发展，和算家丰富了东亚传统数学中的丢番图逼近算法。

因推算日月五星非均匀运动的需要，中国历学家发明了多项式函数内插法，另一方面，由于垛积求和的需要，建立了多项式函数的有限差分算法。和算家推广了《授时历》的等间距三次内插法，创立了“累裁招差法”、“混沌招差法”、“方程招差法”等多种招差法，使之成为具有一般性的多项式待定系数法，不仅应用于高阶等差数列求和的研究，获得一系列垛积公式，而且将“混沌招差法”应用于弧长计算，引导和算在弧长计算中开拓了无穷幂级数展开的研究。

由于计算制度与计算技术的发达，在无穷小分析领域，中国数学传统比诸希腊数学传统或更为优越，刘徽（3世纪）、祖冲之（429～500）父子在计算圆、弓形面积和球体积以及对阳马术的证明时，使用了极限法，这些被和算

家称之为"圆理"的数学方法孕育着微积分思想方法的萌芽。关孝和、建部贤弘（Takebe Katahiro，1664～1739）、久留岛义太（Kurushima Yoshihiro，？～1757）、松永良弼（Matsunaga Yoshisuke，？～1744）、安岛直圆（Ajima Naonobu，1733～1800）、和田宁（Wata Yasushi，1787～1840）等和算家承刘徽、祖冲之父子之绪，在圆理领域继续开拓，使圆理走向积分法。清代数学由于接受了西方的几何学和三角法，所以在曲线、曲面体度量的无穷小计算中，没有沿袭中国传统的计算方式，更没有利用招差法。对于杜德美（Pierre Jartoux，1668～1720）三术的证明，明安图（？～1764）等清代数学家选择了几何学和三角法的解决途径，"割圆连比例"方法的级数展开，背离了刘徽极限方法的数值计算精神，实可谓"无穷小几何学"。李善兰（1811～1882）以其发明的"尖锥术"进行无穷级数展开，也是欧氏几何学影响的产物。和算的圆理方法未受西方数学影响，是汉字文化圈传统数学中无穷小分析算法的新发展，中算之割圆术、零约术、开方术、招差术、垛积术等传统算法在和算圆理研究中发挥了重要作用。

日本民族擅长钻研技术的特性，加上江户时代游艺文化的影响，使中算的算法精神在和算中表现得十分突出。如累裁招差法、零约术、逐次近似法、累遍增约术、累约术等算法程序都十分精致，是东亚传统数学中算法的典范。吴文俊院士曾经将中国传统数学概括为机械化数学，并将之与希腊传统的公理化数学进行了比较，从而认为近代欧洲的代数学与微积分的产生是东方算法化数学的产物[1]。李文林教授也认为，综观世界数学史，数学发展的主流并非西方学者所描述的那样只有演绎倾向，事实上是演绎倾向与算法倾向交替成为数学发展的主流[2]。在宋元数学传统的基础上发展起来的和算成果表明，东亚传统数学在代数学、微积分学的形成上，并不逊色于西方数学，希腊传统的演绎数学对于近代数学的形成未必处于绝对优势。近代数学之所以在文艺复兴后的欧洲诞生，还主要是特定社会因素的作用。

笔者一直以汉字文化圈区域文化的视角研究中算与和算的算法，研究

---

〔1〕 顾今用.中国古代数学对世界文化的伟大贡献[J].数学学报，1975(1)：20－25.
〔2〕 李文林.算法、演绎倾向与数学史的分期[J].自然辩证法通讯，1986(2)：48－52.

成果发表于中国和日本的科学史与数学史专业杂志上，现以这些研究成果为主体，撰著成一部系统性的专著，通过对中日传统数学文本的现代解读和历史文献的考证，论述和算的主要算法成就及其与中国传统算法的关系，并以今日计算数学的语言分析其科学性与科学价值，以揭示东亚数学的算法化特征。

2010年笔者接受了上海交通大学科学史系江晓原教授的邀请，参加了他主持的国家社科基金重大招标项目“中外科学文化交流历史文献整理与研究”的课题研究，负责其中的子课题“汉字文化圈科学文化交流的历史文献整理与研究”的研究工作。汉字文化圈内的科学文化交流，无论是深度还是广度都远比中国与其他地区的科学文化交流的内容要丰富，文献更浩繁。本课题既需要调查和整理作为科学文化交流载体的历史上的科学著作，也需要调查和研究中国科学著作及其承载的科学知识与科学思想在域外的传播和影响情况。这本著作乃此课题研究成果之一。

目　录

第 1 章　“演段”的演变与东亚代数方法的发展 ………… 001

1.1　数学史学界对“演段”概念的不同解释 ………… 001

1.2　对宋元数学中“演段”的考察 ………… 004

1.3　对明代数学中“演段”的考察 ………… 018

1.4　对和算中“演段”意义的考察 ………… 021

1.5　“演段”概念的内涵及其演变 ………… 032

1.6　从“演段”概念的演变看东亚代数演算方式的发展及其意义 ………… 035

第 2 章　代数方程的数值解法：开方术 ………… 037

2.1　中国古代的开方术与增乘开方术 ………… 038

2.2　关孝和的开方术及其与中算家开方术之比较 ………… 045

2.3　中日方程论的成就 ………… 052

2.4　久留岛义太的迭代法 ………… 067

2.5　久留岛义太的执中法 ………… 071

本章小结 ………… 078

第 3 章　非线性方程组解法：解伏题 ………… 080

3.1　中国的几何代数化传统与消元法 ………… 081

3.2　《算学启蒙》在日传播与天元术的受容 ………… 083

3.3　关孝和的解伏题及其数学机械化特征 ………… 090

3.4　和算家对行列式展开法的改进 ………… 099

3.5　吴方法与和式几何研究 ………… 106

本章小结 …… 113

第4章 多项式函数插值法：招差术 …… 115
4.1 函数插值法原理 …… 116
4.2 中国古代的插值法 …… 120
4.3 关孝和的累裁招差术 …… 127
4.4 关孝和的浑沌招差术 …… 132
4.5 《大成算经》中的方程招差法 …… 138
4.6 关孝和浑沌招差法的思想来源 …… 141
4.7 和算中招差法的各种应用 …… 145
本章小结 …… 147

第5章 级数求和算法：垛积术 …… 150
5.1 中国古代的垛积术 …… 151
5.2 关孝和的垛积术 …… 156
5.3 其他和算家的垛积术 …… 169
本章小结 …… 201

第6章 同余式组与不定方程解法：剪管术与剩一术 …… 202
6.1 中国剩余定理与大衍总数术 …… 202
6.2 演纪术及其与求一术的关系 …… 208
6.3 关孝和的诸约术、剩一术与剪管术 …… 217
6.4 清代数学家的不定分析研究 …… 234

第7章 丢番图逼近算法：零约术 …… 240
7.1 实数的有理逼近法 …… 240
7.2 中国古代的通其率术与调日法 …… 245
7.3 关孝和的零约术与和内插方法 …… 247
7.4 建部贤明的零约术与连分数展开法 …… 249
7.5 建部贤弘的累约术与重约术 …… 251

7.6 久留岛义太的平方零约术与周期连分数展开 …… 255
7.7 和算丢番图逼近算法的中算源流 …… 257

第 8 章 极值算法：极数术 …… 261
8.1 建部贤弘的极数术与久留岛的极数 15 问 …… 262
8.2 中国传统历算中的极值概念萌芽 …… 264
本章小结 …… 267

第 9 章 数值加速逼近算法：累遍增约术与 Romberg 算法 …… 270
9.1 关于 Richardson 外推法与 Romberg 算法 …… 270
9.2 建部贤弘的累遍增约术与 Romberg 算法 …… 273
9.3 关孝和的一遍增约术 …… 278
9.4 刘徽的“以十二觚幂率消息”探源 …… 282

第 10 章 几何求积与无穷级数展开法：圆理缀术 …… 287
10.1 中国古代数学中的圆理问题 …… 288
10.2 江户初期的圆理 …… 298
10.3 关孝和的圆理研究 …… 303
10.4 建部贤弘的圆理缀术 …… 306
10.5 宅间流的圆理研究 …… 316
10.6 久留岛义太与松永良弼等人的圆理研究 …… 324
10.7 安岛直圆的弧背术与二次圆理缀术 …… 333
10.8 和田宁的圆理豁术与积分数值表 …… 340
本章小结 …… 362

第1章
“演段”的演变与东亚代数方法的发展*

中国传统数学中的一些概念和方法，在17～19世纪的朝鲜和日本得到传播、继承和发展，以区域文化视角对这些传统数学知识在中国、朝鲜和日本的传播和演化的考察，对于深刻认识东亚传统数学，具有特别重要的作用。“演段”是宋元数学与和算中的一个重要概念和数学方法，本章通过系统解读中日传统数学著作，考察“演段”概念和方法在东亚的流变，以厘清“演段”概念的内涵，揭示其代数学意义。

1.1 数学史学界对“演段”概念的不同解释

宋元数学著作虽广泛使用“演段”这一术语，但对于何谓“演段”，均语焉未详，如杨辉[1]称：“盖欲演算之片段也，知片段则能穷根源”，语义简括，令人费解。入明后，随宋元代数方法的失传，明代算书中“演段”概念并不多见，且无解释，以至清代乾嘉学者再次接触宋元数学时，已不甚明了“演段”意义，如清代学者李锐（1769～1817）[2]释之曰：“所谓演者，演立天元，段者，以条段求之也。”此乃附会字面意思的解释，未能道出其真义。

---

* 本章内容曾发表于《自然科学史研究》(2011年第3期，318-344)。

〔1〕 杨辉. 田亩比类乘除捷法[A]. 靖玉树编. 中国历代算学集成(上)[Z]. 济南：山东人民出版社，1993：960.(参考文献中注记[Z]表示古典文献集，下同)

〔2〕 李锐.《益古演段》跋. 李治. 益古演段[M]. 丛书集成本：109.

历史文献中对“演段”意义的模糊表述,为中国数学史学者解读宋元数学带来一些困难,从而对“演段”概念给出不同解释。许莼舫(1906～1965)[1]认为“演段”是一种算法,演段就是把图形分成几段,或推演而成同样几个,移补凑合,藉此而得到问题解答的方法。并指出:演段算法源于赵君卿的弦图,中算家对于求积、开方、级数以及二次、三次方程解法的研究,可凭藉演段取得成功,从而认为“演段能显示出图形和数字之间相关的道理”。围绕李冶(1192～1279)《益古演段》(1259)中的演段与条段,梅荣照[2]认为“条段”是指确定开方式中的“实”、“从”、“廉”的计算方法,“演段”是用天元术阐明条段的来源,用几何图式说明条段的意义;孔国平[3]认为“演段”包含两种建立方程的方法,一是用天元术推演方程,二是以条段法推演方程;袁敏[4]认为:“条段”表示方程各项的一段段条形的面积,“演段”就是指“条段”的演算,意在用天元术解释条段。围绕刘益(生卒年不详)《议古根源》(约1080)的内容和方法,特古斯[5]释“演段”道:演者,即演化推算之功,演示变化过程之意;段者,言田亩之片段,即大小不同的田块。演段,即演算之片段也,即借助图形的各种转换,以达到解题的目的,并认为演段为造术及算法的依据;李迪(1927～2006)[6]认为:段,指图形,演段,就是通过图形的变化,给出解题的思路;沈康身(1923～2009)[7]则解释道:刘益继承刘徽《九章算术》所用的出入相补、以盈补虚原理处理图形问题,并进一步形数结合,数量化,创立演段术,刘益发明的演段术就是用几何图形解释代数方程问题。

无独有偶,关孝和(Seki Takakazu, 1642? ～1708)、建部贤弘(Takebe Katahiro, 1664～1739)等和算家对“演段”概念的表述也较模糊,后世和算史学者对和算“演段”概念也给出不同解读。林鹤一(Hayashi Tsuruichi, 1873～1935)[8]解释道:“虽关孝和发明了天元演段法,但我认为,演段法比

[1] 许莼舫. 中算家的几何学研究[M]. 北京:中国青年出版社,1952:56.
[2] 梅荣照. 李冶及其数学著作[A]. 宋元数学史论文集[C]. 北京:科学出版社,1966:143.
[3] 孔国平. 对李冶《益古演段》的研究[A]. 李迪主编. 数学史研究文集(三)[C]. 呼和浩特:内蒙古大学出版社,1997.
[4] 曲安京主编. 中国古代科学技术史纲(数学卷)[M]. 沈阳:辽宁教育出版社,2000:19.
[5] 特古斯. 刘益及其佚著《议古根源》[A]. 李迪主编. 数学史研究文集[C](一). 呼和浩特:内蒙古大学出版社,1990:58.
[6] 李迪. 中华传统数学文献精选导读[M]. 武汉:湖北教育出版社,1997:205.
[7] 沈康身. 中国数学史大系[M]. 第五卷. 北京:北京师范大学出版社,1999:64.
[8] 林鶴一. 関孝和の円理[J]. 東京物理学校雑誌. 第469号. 另见:林鶴一. 関孝和の円理[A]. 林鶴一博士和算研究集録(上)[C]. 東京:東京開成館,1937:786.

天元术稍有进步，需要与天元术进行区别。所谓演段，为演述阶段的意思，如角术中有角术演段，解释稍复杂者则有演段”；而三上义夫（Mikami Yoshio，1875～1950）[1]则解释道：“其演段术者，两次使用天元术，并进行消元，乃其原则。天元术者，是构造两个同时等于同一个量的算式，其两个算式相消，即互相减，得开方式的方法，开方式相当于现在的方程式。这样对于稍繁杂的问题，简单地根据天元术原则求解，则变得困难，于是，于所求未知数之外，再引入别的可称作辅助数的未知数，在这两个未知数之间构建两个方程式，构建其一个方程式就是天元术的做法，所以构建两个方程式，就是两次使用天元术，而且从其两式中消去辅助未知数，得到只含所问未知数的一个开方式。在关孝和的演段术中，是采用这种做法的。”根据三上义夫的解释，由

$$\begin{cases} M = A_0 + A_1 x + \cdots + A_n x^n \\ M = B_0 + B_1 x + \cdots + B_m x^m \end{cases}$$

消去 M，得到开方式的方法为天元术；而由

$$\begin{cases} A_0 + A_1 x + \cdots + A_n x^n = 0 \\ B_0 + B_1 x + \cdots + B_m x^m = 0 \end{cases}$$

消去 x 的消元方法（其中系数 A_k，B_k 中含有辅助未知数 y），则为演段术。

中日数学史学者对“演段”概念的解释，虽不同程度、不同角度地揭示了“演段”的一些本质，但也存在一些问题。许莼舫的解释过于笼统，没有说明“演段”与“出入相补”的区别，也没有清楚说明何谓“图形和数字之间相关的道理”。梅荣照、孔国平、袁敏的解释仅局限于《益古演段》中的“演段”，李迪、沈康身、特古斯的解释仅针对刘益《议古根源》中的“演段”，均不免片面，所释均与杨辉（生卒年不详）、朱世杰（1249～1314）著作中的“演段”意义不尽一致。

梅荣照把“条段法”理解为确定方程系数“实”、“从”、“廉”的数学方法，这样理解是合适的，但其所谓“用天元术阐明条段的来源，用几何图式说明条段的意义”，未能道出“演段”的真实意义。孔国平把“演段”理解为立方程的两种方法——条段法与天元术，是正确的，但未能说明其他宋元算书中的

---

〔1〕 三上義夫. 関孝和の業績と京阪の算家並に支那の算法との関係及び比較[J]. 東洋学報，1932(20)：232.

“演段”与李冶著作中“演段”的联系。沈康身虽指出了刘益演段法与基于出入相补原理的几何图示法的联系，但未指明刘益的“演段术”与天元术的关系，更未论及《四元玉鉴》中的“演段”与刘益演段法的联系和区别。

以上诸家都未能清晰解释“段”的意义。特古斯的解释，先言：“段者，言田亩之片段，即大小不同的田块”，把“段”理解为几何形体。后言：“演段，即演算之片段也”，乃附会杨辉之语。后言之“片段”较前言者抽象，并非几何形体。李迪释“段”为图形，意义比较狭隘，其最初意义确如此，但随着天元术、四元术的应用，“段”之意义是有所变化的。袁敏把“条段”看作名词，解释成“方程各项的一段段条形的面积”，把“演段”曲解为“演算条段”。

林鹤一与三上义夫对和算“演段”的解释，都仅局限于关孝和的关于天元术、旁书法和消元法的“演段术”，即以建部贤弘的《发微算法演段谚解》(1685)中的“演段”为中心，没有系统考察其他和算著作以及其他数学问题中的“演段”概念。笔者[1]曾经指出，“演段”概念具有狭义与广义之分，演段概念及其方法随代数方法的改变而有所不同。林鹤一解释的是广义的“演段”，三上义夫解释的是狭义的“演段”。

事实上，“演段”概念自北宋产生以后，其内涵随代数方法的发展而不断变化，经历了宋代的条段法阶段、金元时期的天元术阶段、明代的式微沉寂阶段、和算家的点窜术阶段，以至于成为和算中普遍使用的代数分析方法。因此“演段”与条段法、天元术、消元法、点窜术有着密切的联系。以往对“演段”的解释，都片面、孤立地考察其使用情形和使用背景，未揭示其共同特征，未考察中算与和算中的“演段”的联系与区别，也未分析“演段”与天元术、旁书法、点窜术的关系，更未能认识“演段”概念与方法的发展阶段，从而未能揭示“演段”作为东亚传统数学研究中的代数分析方法的作用和意义。

1.2　对宋元数学中“演段”的考察

1.2.1　关于刘益著作中的演段

现存资料表明，“演段”概念最早出现于杨辉的《田亩比类乘除捷法》

[1] 徐泽林. 中算机械化思想在和算中的发展——解伏题的机械化特征[J]. 自然科学史研究. 2001,20(2)：120-131.

(1275)。杨辉在编成《乘除通变本末》之后,"及见中山刘先生益撰《议古根源》,演段锁积,有超古入神之妙,其可不为发扬,以裨后学,遂集为《田亩算法》"〔1〕。《田亩比类乘除捷法》卷上内容为各种形状田地的面积公式及其例题,是《九章算术》方田章内容的延伸,卷下主要是"锁积"类问题,辑录了北宋刘益《议古根源》中部分"直田"类问题及其解法。《议古根源》演段直田类问题百问,其百问应该都是"锁积"问题。《田亩比类乘除捷法》卷下直田演段的问题(包括冠以"演段曰"的术文与几何图示的"演段图"),当采自《议古根源》。理由如下:

杨辉在《田亩比类乘除捷法》序言中称:

> 中山刘先生作《议古根源》,序曰:入则诸门,出则直田。盖此义也。撰成直田演段百问,信知田体变化无穷,引用带纵开方、正负损益之法,前古所未闻也。作术逾远,罔究本源,非探赜索隐而莫能知之。辉择可作关键题问者,重为详悉著述,推广刘君垂训之意〔2〕。

这些演段图均为直田,是其所言"出则直田","撰成直田演段百问"的具体表现。这些演段图若非刘益所作,则刘益序中所言无所本。演段图所反映的数量关系与"演段曰"下的术文内容吻合,互为表里,也与杨辉所言"刘益撰成直田演段百问"相合。杨辉明言自己只是为《议古根源》"详注图草,以推广刘氏垂训之意。"

《议古根源》今已亡佚,欲考察其"演段"意义,只需考察杨氏《田亩比类乘除捷法》(图 1.1)。首先,我们来考察《田亩比类乘除捷法》中使用"演段"的场合。在刘益的 22 道问题中,出现"演段曰"的地方,均为使用二次方程求解的问题,而在以算术方法求解的问题中,无一处用到"演段",而且这些使用"演段"处理的问题,都是几何问题,采用基本类似的几何模型。可以认为,刘益"演段"的使用范围,基本都是可用二次方程求解的几何问题。

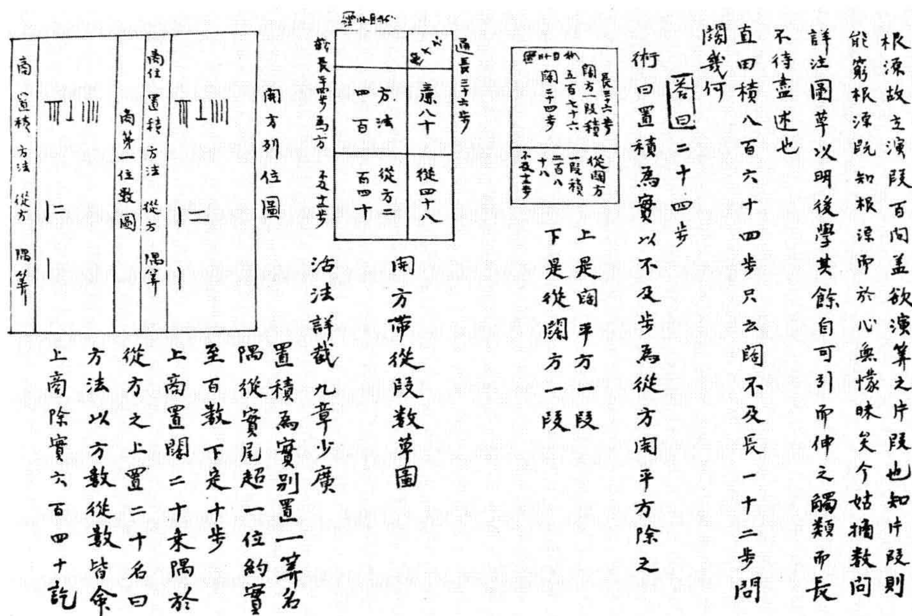
其次,我们来考察"演段曰"下所述方法与"演段图"在《议古根源》中的作用,以分析为何首次在刘益的著作中出现"演段"方法。从刘益的 22 个原

---

〔1〕 杨辉. 续古摘奇算法序[A]. 郭书春主编. 中国科学技术典籍通汇・数学卷[Z]. 第 1 册. 郑州:河南教育出版社,1993:1095.

〔2〕 杨辉. 田亩比类乘除捷法[A]. 郭书春主编. 中国科学技术典籍通汇・数学卷[Z]. 第 1 册. 郑州:河南教育出版社,1993:1073.

题可以看出，刘益的开方术比前人有明显突破，其“引用带从开方、正负损益之法，前古所未闻也”[1]。刘益原题之后给出了如益积开方、减从开方等各类方程的求解方法。开方术的突破，必然会要求相应的列方程方法要有所改进，因为只有有效地建立方程，才能获得“正负开方术”所处理的各类方程，以发挥正负开方术的作用。


根源故立演段百問蓋欲演算之片段也知片段則
能窮根源既知根源而於心無懞昧矣今姑摘數問
詳注圖草以明後學其餘自可引而伸之觸類而長
不待盡述也
直田積八百六十四步只云闊不及長一十二步問
闊幾何
答曰二十四步
術曰置積為實以不及步為從方闊平方除之

長三十六步　闊方一段積五百七十六　闊二十四步
從闊方一段積二百八十八
上是闊平方一段
下是從闊方一段

闊方帶從段數草圖
通長三十六步　廉八十　從四十八
方法四百　從方二百四十
截長二十四步為方
活法詳截九章少廣
置積為實別置一算名
隅從實尾超一位約實
至百數下定十步
上商置闊二十來隅於
從方之上置二十名曰
方法以方數從數皆命
上商除實六百四十訖

闊方列位圖
商位　置積　方法　從方　隅算
商第一位數圖
商　置積　方法　從方　隅算

图 1.1　杨辉《田亩比类乘除捷法》中的直田演段[2]

再次，我们来考察刘益“演段”所用的方法。刘益的“演段图”与术文内容相对应，其“演段”是以“直田”演示的，与后来《益古演段》中的条段法方式一致，所以刘益的演段也就是后来所称的条段法。以下通过《田亩比类乘除捷法》卷下所录《议古根源》问题的第一题及其演段过程，来说明刘益“演段”的意义。

该题所处理的是二次方程 $x^2+12x=864$。刘益首先给出演段图，以几何图形显示方程各项：外方为直田积 846，上方为阔方 x^2，下为从阔方（长阔差乘阔）$12x$（图 1.2）。

---

〔1〕 杨辉. 田亩比类乘除捷法[A]. 郭书春主编. 中国科学技术典籍通汇 · 数学卷[Z]. 第 1 册. 郑州：河南教育出版社，1993：1073.

〔2〕 杨辉. 田亩比类乘除捷法[A]. 郭书春主编. 中国科学技术典籍通汇 · 数学卷[Z]. 第 1 册. 郑州：河南教育出版社，1993：1086.

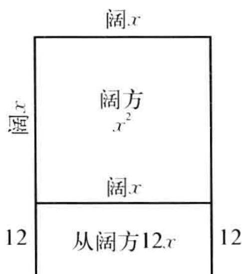


图 1.2 《田亩比类乘除捷法》卷下第一题演段图

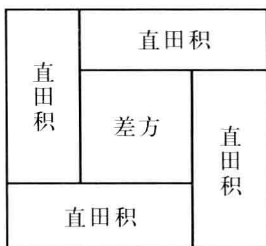


图1.3 《田亩比类乘除捷法》卷下第六题演段图

其演段目的在于说明方程系数的由来。这里的“段”是量词，意为个、块，不是指图形的面积，而是指图形的数量，即一段阔方、一段从阔方。再如其第六题：

> 演段曰：和自乘，有四段直田积，一段差方积，所以用四积减和方，剩下差方一段，却取方面〔1〕。

其中的段数，指 $(a+b)^2-4ab=(a-b)^2$ 式中各项常系数 1，4，1，虽不是二次方程的系数，但由此可以导出方程系数。其演段图如图 1.3。

刘益“演段”目的是列二次方程，即说明如何导出方程系数，所用方法为条段法。这一方法肇始于赵爽的“勾股图说”。赵爽为了说明勾股弦互求问题，提出一个已知长方形面积 A 与长(即股)阔(勾)之和 c，求长阔的问题。若令阔为 x，导出一个二次方程 $x(c-x)=A$ 或 $-x^2+cx=A$，赵爽给出了几何图解。对于已知勾股和(或勾股差)以及勾股积，以求勾股的问题，被刘徽引入《九章算术》勾股章问题的注释中，也采用出入相补原理，通过几何图示导出带从开方式。

刘益所谓“算之术，入则诸门，出则直田”，与明代学者朝弼在《测圆海镜分类释术》(1550)序言中所说：“九数起于方田而终于勾股，盖极其奥且难矣”〔2〕，以及杨辉在《乘除通变本末》“习算纲目”中所称：“开方乃算法大节目，勾股、旁要，演段锁方多用，例有七体：一曰开平方，二曰开平圆，三曰开立方，四曰开立圆，五曰开分子方，六曰开三乘以上方，七曰带从开方，并载

〔1〕 杨辉. 田亩比类乘除捷法[A]. 郭书春主编. 中国科学技术典籍通汇·数学卷[Z]. 第 1 册. 郑州：河南教育出版社，1993：1089.

〔2〕 朝弼.《测圆海镜分类释术》序[A]. 郭书春主编. 中国科学技术典籍通汇·数学卷[Z]. 第 2 册. 郑州：河南教育出版社，1993：995.

少广、勾股二章。"[1]反映的数学思想是一致的。检阅东亚传统数学著作，大多把"开方"类问题列于书末，表明解方程问题是东亚传统数学知识中难度最深、水平最高的内容，这些方程问题导源于"少广"和"勾股"，前者导出 $a_nx^n = a_0$ 的方程，后者导出 $a_2x^2 + ax = a_0$（后推广为 $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + ax = a_0$）的方程。刘益演段直田百问，实际是对赵爽、刘徽两人以勾股构建二次方程这类问题的发挥。

1.2.2 杨辉对演段的解释和使用

后世学者对"演段"的解释，主要围绕刘益、蒋周（生卒年不详）和李冶著作中的"演段"而作出的，但刘益、蒋周、李冶等人都没有给出何谓"演段"的明确说明。杨辉《田亩比类乘除捷法》之所以收录刘益《议古根源》中的 22 个问题，与其介绍刘益的"正负损益开方术"有关，杨辉在书中多次提及"演段"并予以很高评价。欲解明宋代"演段"意义，不能不分析杨辉对"演段"的解释与使用。

杨辉著作中，除提及刘益的演段之外，杨辉自己 6 处言及"演段"，其中一处出自杨辉《详解九章算法》序言，5 处出自《杨辉算法》。现分别摘录如下：

①《详解九章算法》自序：

> 题有分者，随母通之；母不同者，齐子并之；田不匠者，折并直之；数皆求者，互乘换之；差等除实，别而衰之；叠垒积者，以形测之；数隐互者，维乘并之为问，正负入之；勾股旁要，开方求之；节题匿积，演段取之。此算法之尽理也[2]。

②《乘除通变本末》"习算纲目"称：

> 开方乃算法大节目，勾股、旁要，演段锁方多用，例有七体。一曰开平方，二曰开平圆，三曰开立方，四曰开立圆，五曰开分子方，六曰开三乘以上方，七曰带从开方，并载少广、勾股二章[3]。

---

〔1〕杨辉. 乘除通变本末[A]. 郭书春主编. 中国科学技术典籍通汇·数学卷[Z]. 第 1 册. 郑州：河南教育出版社，1993：1049.

〔2〕杨辉. 详解九章算法[A]. 郭书春主编. 中国科学技术典籍通汇·数学卷[Z]. 第 1 册. 郑州：河南教育出版社，1993：951.

〔3〕杨辉. 乘除通变本末[A]. 郭书春主编. 中国科学技术典籍通汇·数学卷[Z]. 第 1 册. 郑州：河南教育出版社，1993：1049.

③《乘除通变本末》“习算纲目”中又称：

《事物纪原》载勾股旁要，本是两章，今总为一章，详观法意，实是两端，刘徽以旁要之术变重差减积，为海岛九问；刘益以勾股之术治演段锁方，撰《议古根源》二百问，带从、益隅开方，实冠前古[1]。

④《田亩比类乘除捷法》序：

为田亩算法者，盖万物之体，变段终归于田势，诸题用术，变折皆归于乘除。中山刘先生作《议古根源》序曰：“入则诸门，出则直田”，盖此义也。撰成直田演段百问，信之田体变化无穷，引用带从开方，正负损益之法，前古所未闻也[2]。

⑤《田亩比类乘除捷法》卷下：

中山刘先生谓：算之术，入则诸门，出则直田。《议古根源》故立演段百问，盖欲演算之片段也，知片段则能穷根源，既知根源，而于心无蒙昧矣。今姑摘取数问，详注图草，以明后学，其余自可引而伸之，触类而长，不待尽述也[3]。

⑥《续古摘奇算法》自序：

及见中山刘先生撰《议古根源》，演段锁方，有超古人神之妙，其可尽为发扬，以裨后学，遂集为《田亩算法》[4]。

在①，②，③，⑥处，杨辉把“演段”与“锁方”、“节题匿积”、“勾股”、“旁要”等联系在一起。从文法上看，演段是动词，锁方、节题匿积是名词。匿积、锁积或锁方，是由少广、勾股引出来的开方式（方程式）的代名词，而释锁就是开方（解方程）的代名词。所谓“节题匿积，演段取之”、“演段锁方”是一个意思，即演段是处理匿积、锁积问题的一种手段或数学方法，它所采用的形式就是勾股和旁要[5]。在④，⑤处，杨辉是在说明刘益曾“演段”二百个直田问题。

---

〔1〕 杨辉. 乘除通变本末[A]. 郭书春主编. 中国科学技术典籍通汇·数学卷[Z]. 第1册. 郑州：河南教育出版社，1993：1049.

〔2〕 杨辉. 田亩比类乘除捷法[A]. 郭书春主编. 中国科学技术典籍通汇·数学卷[Z]. 第1册. 郑州：河南教育出版社，1993：1073.

〔3〕 杨辉. 田亩比类乘除捷法[A]. 郭书春主编. 中国科学技术典籍通汇·数学卷[Z]. 第1册. 郑州：河南教育出版社，1993：1086.

〔4〕 杨辉. 续古摘奇算法[A]. 郭书春主编. 中国科学技术典籍通汇·数学卷[Z]. 第1册. 郑州：河南教育出版社，1993：1095.

〔5〕 旁要，按照杨辉的解释，应该是与勾股测量算法有关的数学问题。

对于刘益“演段”直田百问的目的，杨辉解释成：“盖欲演算之片段也，知片段则能穷根源，既知根源，而于心无蒙昧矣。”这句话让后人费解。“演算之片段”当指演算过程的若干步骤，林鹤一对“演段”的解释，接近此义。杨辉将“段”解释成“片段”，未能道出刘益“演段”之“段”的本义——平面图形的数量。虽不能由此而断言杨辉不明刘益演段方法的本质，但可以认为，杨辉未必理解刘益演段直田百问的真实意图，《田亩比类乘除捷法》中杨辉对刘益直田演段问题的处理，也能反映这一点。

首先，《田亩比类乘除捷法》卷上是各种几何图形的面积计算问题，使用的方法都是乘法或除法，没有涉及二次方程，所以没有用到演段；卷下前三题是对《五曹算经》误刊的方田、四不等田问题的纠正，也不涉及二次方程，故也不用演段；后面的 27 个题中，除 1，2 题以及 4，6，8 三道比类题外，余下的 22 个问题均为《议古根源》中的直田问题，都使用演段。所以杨辉《田亩比类乘除捷法》是以“田亩”（包括直田）来比类乘除（包括开方）运算的，与《议古根源》通过演段直田以获得带从、益隅开方式的著作目的是不同的。

其次，杨辉在刘益直田演段的基础上“详注图草，以明后学”，从其所注图草可以看出，杨辉对于使用“演段”的目的与刘益也不完全一致。卷下所引刘益的 22 个问题中，每题之后均有答，有术（除第 19 题[1]），部分题[2]术后有“演段曰”，部分题[3]附有演段图。现存的图可分为两类，一类包括题图，演段图，法图；另一类则为算草中的开方图。除演段图外，其余各图应为杨辉所补。其“法图”（如第二题的法图，图 1.4）意义与刘益演段图不一致，与列方程无关，是开方法的几何表示图，

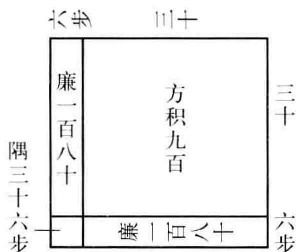


图 1.4　杨辉的法图

也是用条段法。杨辉没有区分“法图”与“演段图”，它们的作用相反，前者以几何方式解释解方程算法，而后者以几何方式说明列方程的过程。

不过，杨辉对于直田演段进行了比类，例如对于《田亩比类乘除捷法》卷下所录《议古根源》问题的第一题，作如下比类：

---

〔1〕 其余 27 题编号按题目先后顺序排序。
〔2〕 题序为 4，5，6，7，8，9，10，11，21，22。
〔3〕 有演段图的题序为 1，2，3，4，5，6，8，9，10，11，13，18，20。

给银八百六十四两，只云所得银之两数比总分人数其银多十二两，问总是几人，每人各得几两？

答曰：二十四两，三十六人。

这是非直田类问题，数量关系与刘益的直田问题一致，也可归结为二次方程 $x^2+12x=864$。他把可利用一元二次方程求解的非几何问题，比类成直田问题，拓广了演段方法的使用范围，使其成为一般化的代数方法。

综上可知，杨辉出于以田亩求积解释乘除算法的目的，收入了《议古根源》建立二次方程的直田问题，忽视了刘益直田演段的目的，它对“演段”的解释以及对刘益直田演段问题的处理，模糊了“演段”的意义，对明代数学家在理解和使用演段上产生了负面影响。但他将非几何类问题比类成直田问题，使演段方法超越几何类问题，反映南宋时期出现了以几何方式处理一切数学问题的倾向，这种代数方式可谓几何化代数。

1.2.3　李冶著作中的演段

李冶是继刘益之后使用“演段”这一术语最多的数学家，“演段”这一术语不仅见诸《益古演段》之书名，而且该书多处使用与之相关的“条段”、“段”、“条段图”等术语。欲理解李冶“演段”的意义，需分析其著作意图和演段作用，更需结合其“条段法”进行分析。

对于该书的写作意图，李冶在《益古演段》自序中叙道：

近世有某者，以方圆移补成编，号《益古集》，真可与刘李相颉颃，余犹恨其秘匿而不尽发，遂再为移补条段，细翻图式，使粗知十百者便得入室昭其文〔1〕。

《益古集》乃北宋蒋周作品，内容为移补方圆问题，即已知平面图形面积求圆径、边长、周长的数学问题，一般都需要二次方程求解。《益古演段》就是演段《益古集》中的这些问题，李冶先用天元术，后“依条段求之”，所以李冶的“演段”包括天元术和条段法两种形式，如《益古演段》第 22 题如下（如图 1.5）：

---

〔1〕 李冶. 益古演段[A]. 郭书春主编. 中国科学技术典籍通汇・数学卷[Z]. 第 1 册. 郑州：河南教育出版社，1993：875.

今有方田一段，其西北隅被斜水占之，外计地一千二百一十二步七分半。只云纵田东南隅至水楞四十五步半，问田方面多少？

答曰：田方面三十五步。

法曰：立天元一为水占斜，加入云数四十五步半，得 ☰||||☰ 太 / | 元 为田斜，以自增乘得 ‖○╥○‖☰ 步 / ⊥☰| / | 为田斜幂，于头，再立天元一为水占斜，以自之为水占，得小方积。就分以一步九分六厘乘之，得 ○ 元 / ⊥⊤ / |☰| 步，为所展得水占积也。以减头位，得 ‖○╥○‖☰ / ⊥☰| / ○⊥☰⊤ 步，为如积一段，寄左，然后列真积一千二百一十二步七分半，以一步九分六厘乘之，得数二千三百七十六步九分九厘，以与左相消，得 |||○⊤⊥卌 / ⊥☰| / ○⊥☰⊤，开平方，得三步半，为水占斜，加至步，为田斜，身外减四，即是方面也。

依条段求之：展积内减至步幂，为实，二之至步，为从，九分六厘虚常法，开平方，得三步半，即水占斜也。

义曰：今将水占斜直命为小方池面也。

旧术曰：列田积于头位，又列至步除四，则直至步，以自乘，减头位，余为实，二之积步，为从，以九分六厘为廉，减纵开方，得二步半，加直至步三十二步半，得三十五步，即田方面也。

此图即旧术条段也。旧术减云步为直至步，入法而求得二步半，为直至步不及方面步。新术展积，入法而求得三步半，为水占斜[1]。

其条段法包括“依条段求之”所述的李冶方式以及旧术。所谓旧术，指蒋周《益古集》中的条段法。两者区别在于李冶方式用展积求水占斜，再求

---

〔1〕 李冶. 益古演段[A]. 郭书春主编. 中国科学技术典籍通汇·数学卷[Z]. 第1册. 郑州：河南教育出版社，1993：898.

水至步(如图 1.6),而蒋周旧术没用展积,而直接求直至步(如图 1.7)。就以几何图示推演方程系数而言,两者没有本质差别。李冶演段过程中,天元术在前,条段法在后,其用意在于,以条段法验证天元术的正确性,使人们容易理解方程系数的由来。

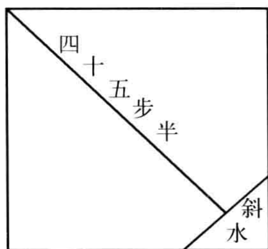


图 1.5 《益古演段》第 22 题图

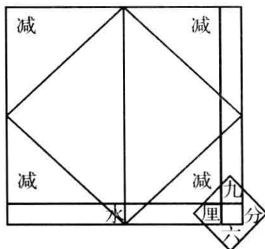


图 1.6 李冶的条段图

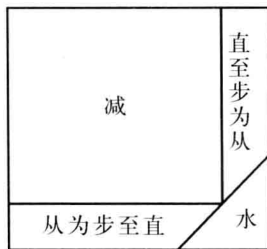


图 1.7 蒋周旧术的条段图

值得注意的是,李冶演段之“段”的意义,随天元术的使用而有所扩张。《测圆海镜》(1248)卷七第二问的“又法”叙之曰:

> 以二行差幂数自乘,又倍之,为实,并二行步以乘二行差幂,又四之,为益从,四段南行幂内减二段差幂于上,又二段差幂内减四段东行幂,余以减上位,为第一廉,四之二行,共为第二廉,二步虚法,益积开之,得皇极弦二百八十九[1]。

其卷七第二问术文中还有“乘股弦差二段”的说法,这表明,其“段”的意义不再局限于具体的平面图形的数量,而逐渐抽象为各类数学量的倍数(常系数)。

1.2.4 朱世杰著作中的演段

《四元玉鉴》中的“演段”主要出现于两种场合:一是卷首的诸“自乘演段图”,另是卷中的“明积演段门”。这两场合都与勾股问题或直田问题有关,其“演段”过程包含条段法、天元术和四元术。

我们首先分析“自乘演段图”中演段的意义。《四元玉鉴》卷首共有四个图,依次为“今古开方会要之图”、“四元自乘演段之图”(如图 1.8)、“五和自乘演段之图”、“五较自乘演段之图”。其中,第一图“今古开方会要之图”(包

〔1〕 李冶. 测圆海镜[A]. 郭书春主编. 中国科学技术典籍通汇·数学卷[Z]. 第 1 册. 郑州: 河南教育出版社,1993: 816.

括“梯法七乘方图”和“古法七乘方图”）系用于解方程的开方作法本源图，后三图便是所谓的演段图。令勾股形的勾为 a、股为 b、弦为 c、黄方为 d，则图二“四元自乘演段之图”（如图 1.8）所表示的数量关系为

$$(a+b+c+d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd$$

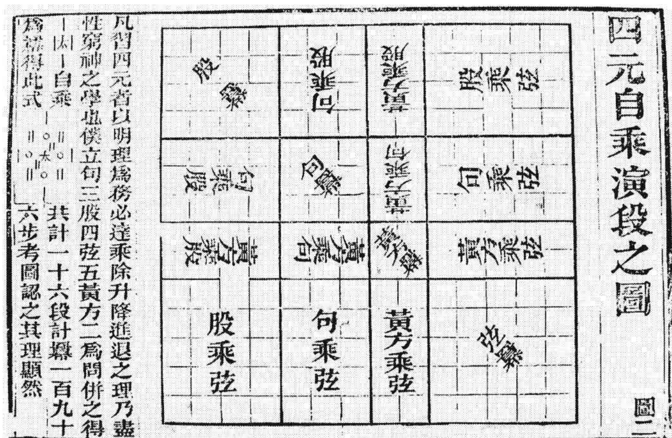


图 1.8 《四元玉鉴》“四元自乘演段之图”〔1〕

图三“五和自乘演段之图”所表示的数量关系式为

$$\begin{aligned}&\{[(b+a)+c]+(c+b)+(c+a)+[(b-a)+c]+(a+b)\}^2\\&=[(b+a)+c]^2+(c+b)^2+(c+a)^2+[(b-a)+c]^2+\\&\quad(a+b)^2+2[(b+a)+c](c+b)+2[(b+a)+c](c+a)+\\&\quad2[(b+a)+c][(b-a)+c]+2[(b+a)+c](a+b)+\\&\quad2(c+b)(c+a)+2(c+b)[(b-a)+c]+2(c+b)(a+b)+\\&\quad2(c+a)[(b-a)+c]+2(c+a)(a+b)+2(a+b)[(b-a)+c]\end{aligned}$$

图四“五较自乘演段之图”所表示的数量关系式为

$$\begin{aligned}&\{(b-a)+(c-a)+(c-b)+[c-(b-a)]+[(b+a)-c]\}^2\\&=(b-a)^2+(c-a)^2+(c-b)^2+[c-(b-a)]^2+[(b+a)-c]^2+\\&\quad2(b-a)(c-a)+2(b-a)(c-b)+2(b-a)[c-(b-a)]+\end{aligned}$$

〔1〕朱世杰. 四元玉鉴[A]. 郭书春主编. 中国科学技术典籍通汇·数学卷[Z]. 第1册. 郑州：河南教育出版社，1993：1208.

$$2(b-a)[(b+a)-c]+2(c-a)(c-b)+2(c-a)[c-(b-a)]+$$
$$2(c-a)[(b+a)-c]+2(c-b)[c-(b-a)]+$$
$$2(c-b)[(b+a)-c]+2[c-(b-a)][(b+a)-c]$$

这三个演段图本质上是多项式平方公式。这里并未提及条段，但其实质与《议古根源》、《益古集》乃至《杨辉算法》、《益古演段》中用条段法进行直田演段是一致的，而且表面上看似它们与列方程无关，实际上它们是“直积求源门”、“明积演段门”等有关问题中列二次方程的依据。朱世杰在“四元自乘演段之图”之后，注曰：

凡四元者，以明理为务，必达乘除升降进退之理，乃尽性穷神之学也。仆立勾三、股四、弦五、黄方二为问，并之得 $\begin{array}{ccc} & | & \\ | & \text{太} & | \\ & | & \end{array}$，自乘为幂，得 $\begin{array}{ccccc} & & | & & \\ & \| & \circ & \| & \\ | & \circ & {}_{\|}\text{太}^{\|} & \circ & | \\ & \| & \circ & \| & \\ & & | & & \end{array}$，此式共计一十六段，计幂一百九十六步，考图认之，其理显然〔1〕。

意思是说，四元术的要务是明理，要明乘除升降进退之理。所谓“乘除升降进退之理”，就是多项式乘除运算规则，因为四元式的基本形式是天元式（多项式），在推演四元式的列方程演算和消元演算中，主要是天元式的加减乘除四则运算，天元式的加减运算比较简单，只需将同行系数进行加减就可以了，而天元式的乘除运算较复杂，天元式乘天元式，结果表现为天元式的升降进退，除法运算需通过“别置”除式而化为乘法运算。因此，多项式乘法公式在四元术的演算中显得十分重要，故于卷首列出表示多项式乘法公式的诸元自乘演段之图，以备列方程和消元演算之用。由于没有符号代数，这些公式以传统惯用的条段法即几何方式直观表示，即其所谓的“考图认之，其理显然”。

朱世杰在“五较自乘演段之图”后又注曰：“夫算中元妙，无过演段，如积

---

〔1〕 朱世杰. 四元玉鉴[A]. 郭书春主编. 中国科学技术典籍通汇·数学卷[Z]. 第 1 册. 郑州：河南教育出版社，1993：1208.

幽微,莫越认图。"[1]这里的"元",指天元术、四元术,"如积"是用天元术列方程的术语,先推演 $f_1(x)=A$,寄位,再推演 $f_2(x)=A$,与寄位相消,获得天元式(即开方式) $f_1(x)-f_2(x)=f(x)=0$,对于二(或三)次方程而言,其中 A 往往是平面(或立体)几何图形中某部分的面积(或体积),推演 $f_i(x)=A$,就叫如积求之。认图,就是认演段图。故朱世杰所言,意思是说"四元术的奥妙,不外乎演段,以天元术列方程,方法幽微,但莫过于辨认演段图"。此言表明,卷首演段图也是通过勾股图形分析代数关系以建立方程的依据。其后的"四象细草假令之图"都是根据前面的演段图来构造方程或方程组的,它们可以帮助我们理解何谓"如积幽微,莫越认图"。如"一气混元"中构造一元五次的天元式,其关键在于如何以天元式将勾、股、弦表示出来。演算过程中利用

$$\begin{cases} c-b=\dfrac{a^2}{c+b} & (1) \\ c+b=9 & (2) \end{cases}$$

其中:式(1)为今式;式(2)为云式。当以 a 为元,即所设未知数 x 时,求得

$$\begin{cases} 2c=(c+b)+(c-b)=9+\dfrac{x^2}{9} & (3) \\ 2b=(c+b)-(c-b)=9-\dfrac{x^2}{9} & (4) \end{cases}$$

演算过程中,式(3)与式(4)可以通过演段图获得。因此,卷首的"演段图"不仅是作为代数运算依据的乘法公式,而且也是书中列方程而分析数量关系的依据,同时也是将多元转化为一元的演算依据。

其次,我们来分析《四元玉鉴》卷中"明积演段门"中演段的意义。

"明积"与"锁积"或"匿积"相对,前文已述,"锁积"与"匿积"都是指代数方程,那么"明积"就是开方,义近"释锁",所以,"明积演段"就是对有关直田积的方程问题进行演段。"明积演段门"共20问,都是以直田积为问,用天元术列方程求解,其中5个二次方程,10个三次方程,3个四次方程,2个六次

[1] 朱世杰.四元玉鉴[A].郭书春主编.中国科学技术典籍通汇·数学卷[Z].第1册.郑州:河南教育出版社,1993:1209.

方程。除其中的 5 个二次方程可以用条段法进行直田演段而获得天元式外，其余高次方程均无需用刘益、李冶的条段法进行演段。事实上，朱世杰在这里全用天元术进行演段，演段过程中利用了卷首演段图所反映的代数关系和多项式公式。这表明，朱世杰超越李冶而摆脱了几何直观，其演段是比较抽象的和形式化的，关于一般高次方程的纯代数演算。

除《四元玉鉴》外，《算学启蒙》(1299)中也使用演段，并且也有关于演段的说明文字。其卷下“开方释锁门”第八题下的朱世杰自注曰：

> 按：此以古法演之，和步自乘，得八千四百六十四步，乃四段直积，一段较幂也。列积，四之，得八千二百八，减之，余有较幂二百五十六，为实，以一为廉，平方开之，得较一十六步，加和，半之，得长，长内减较，即平也。今以天元演之，明源活法，省功数倍。假立一算于太极之下，如意求之，得方、廉、隅从正负之段，乃演其虚积，相消相长，脱其真积也。予故于逐问，备立细草，图其纵横，明其正负，使学者粲然易分晓也[1]。

朱氏所称“以古法演之”的“古法”，当指“条段法”，所言“今以天元演之”，当指天元术。所以，朱世杰的注文表明，条段法(古法)和天元术都是演段方法。在这里，他与李冶在《益古演段》中的做法一样，将天元术与条段法进行比较。和算家建部贤弘根据这段关于天元术的注文，在《缀术算经》(1722)中通过直田问题论述天元术应用时，也指出：

> 如古法，将直积围成四方，中央容长平差幂而造长平和幂之图，开平方先求长平和。于此题，其理虽速也，若总如此以理究，少于难题役心犹可察理，竟不能成索数之术。今天元之法，其理虽幽隐者，然速得术之神法也，然非不探而直得，纯以因乘、加减之理探，探而得其度者也[2]。

值得注意的是，朱世杰所称的“假立一算于太极之下，如意求之，得方、廉、隅从正负之段”，清楚地说明，演段目的就是要获得“方、廉、隅从正负之段”(方程系数)，其“段”的意义不再是平面图形几何量的量词，如其“开方释

---

〔1〕 朱世杰. 算学启蒙[A]. 郭书春主编. 中国科学技术典籍通汇·数学卷[Z]. 第 1 册. 郑州：河南教育出版社，1993：1183.

〔2〕 建部賢弘. 綴術算經[M]. 享保七年(1722). 内閣文庫藏抄本.

锁门”第15问的术文中称：“一百二十二段平、以长乘之，为一百二十二段积”，这里的“段”既是一维线段的量词，又是二维平面图形的量词，而且后面的题目中还出现如“三段方台积、四段圆台积、四段立方积”的三维立体图形的量词。“段”的意义不再局限于平面图形，几何意义在淡化，代数意义在增强，逐渐抽象为各类数学量的倍数（系数），也为多项式的常系数。

综上可知，朱世杰的“演段”不再拘泥于条段法，而是普遍使用天元术和四元术，是以多项式演算为中心、列方程为目标的代数演算。

1.3 对明代数学中“演段”的考察

天元术在元代末年仍在使用，例如沙克什在重修《河防通议》(1321)时使用了天元术，其列方程步骤与李冶的完全一致。但至明代，除顾应祥还提到天元术外，其余明代数学著作均未出现天元术。顾应祥在《测圆海镜分类释术》对李冶《测圆海镜》中的全部内容重新分类进行注释，但他把原书中用天元术列方程的内容全部删掉，并认为：

> 但其每条下细草，虽径立天元一，反复合之，而无下手之术，使后学之士茫然无门路之可入。辄不自揆，每章去其细草，立一算术，又以其所立通勾边股之属，各以类分之[1]。

可见顾应祥知道有天元术但不能理解，更不会应用。其他明代数学家的著作中均未涉及天元术与四元术，可见宋元时期以代数方程为中心的筹算代数演算方法在明代失传了。但“演段”这一术语在明代尚未完全绝迹，根笔者考查，王文素的《算学宝鉴》(1524)、周述学的《神道大编历宗算会》(1558)与程大位的《算法统宗》(1592)这三本书中有之，它们均取自于杨辉的著作。

《算学宝鉴》(1524)有两处出现“演段”，一是卷十六“平方”，另是卷三十三“共积开平方”[2]。卷十六“平方”，介绍开平方和开带从平方，内容采自杨辉《田亩比类乘除捷法》，并引杨辉《乘除通变本末》之“习算纲目”中语句的：

---

〔1〕 顾应祥.《测圆海镜分类释术》自序.

〔2〕 王文素. 算学宝鉴[A]. 中国科学技术典籍通汇·数学卷[Z]. 第2册. 郑州：河南教育出版社，1993：557.

> 开方乃算法大节目，勾股、旁要、演段、锁方多用，例有七体。一曰开平方，二曰开平圆，三曰开立方，四曰开立圆，五曰开分子方，六曰开三乘以上方，七曰带从开方，并载少广、勾股二章[1]。

所附图与《田亩比类乘除捷法》杨辉所补的“法图”一样，与列方程无关，是开方法的几何表示图，以几何方式解释解方程算法。

卷三十三“共积开平方”旨在介绍带从开方，以已知两个平面图形的面积和发问。本卷仅前三题有“演段”，第一题为“古题”，引杨辉《田亩比类乘除捷法》的一个问题，第二、第三两题为王文素所拟，这些问题的“演段图”也是用来解释开方算法。

显然，王文素《算学宝鉴》中的演段完全来自杨辉著作，与列方程无关。

《神道大编历宗算会》(1558)卷四中的“翻法演段图”也是开方法的几何解释图(如图 1.9)，无涉列方程的代数演算，应该也是受杨辉的影响。

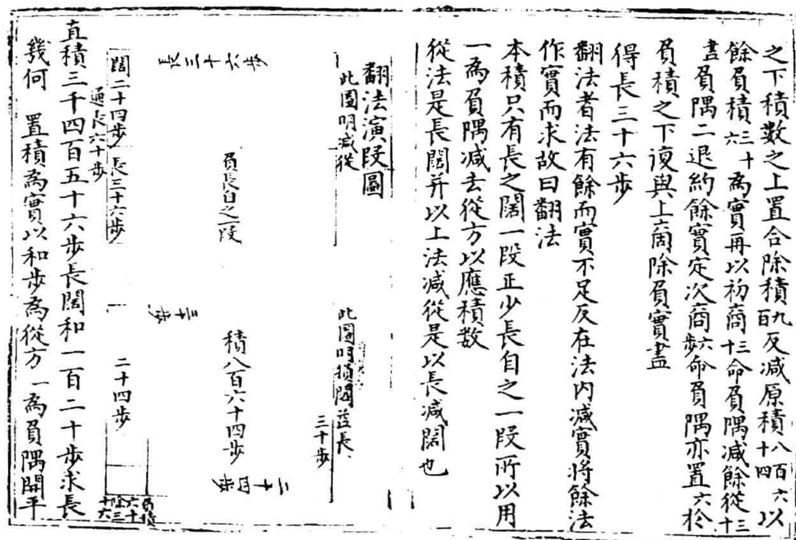

之下積數之上置合除積九百反減原積八百六十四以
餘負積六十三為實再以初商十三命負隅減餘從十三
盡負隅二退約餘實定次商六步命負隅亦置六於
負積之下復與上商除負實盡
得長三十六步
翻法者法有餘而實不足反在法內減實將餘法
作實而求故曰翻法
本積只有長之闊一段正少長自之一段所以用
一為負隅減去從方以應積數
從法是長闊并以上法減從是以長減闊也
翻法演段圖
此圖明減從
負長自之一段
積八百六十四步
此圖明積闊並長
三十步
長三十六步
闊二十四步
通長六十步
長三十六步
二十四步
直積三千四百五十六步長闊和一百二十步求長
幾何　置積為實以和步為從方一為負隅開平

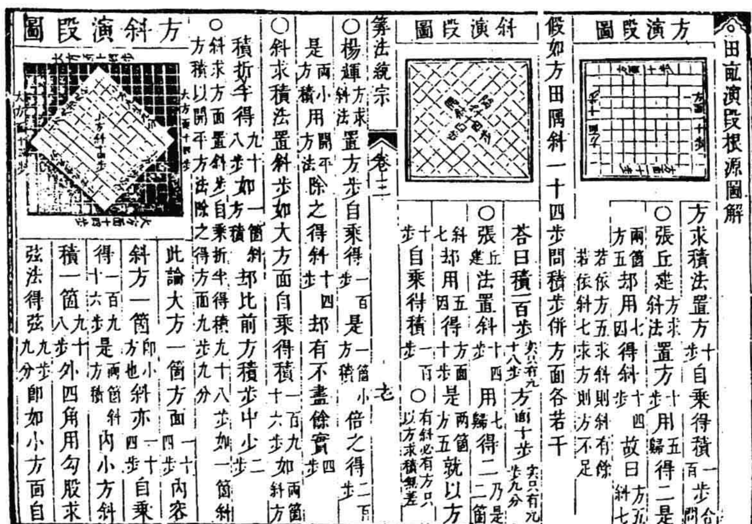
图 1.9　《神道大编历宗算会》中的演段[2]

《算法统宗》(1592)卷下有两处也提到“演段”，一是卷三“田亩演段根源图解”(如图 1.10)，二是卷六“少广”中的“演段根源开方图解”(如图 1.11)。

---

〔1〕王文素. 算学宝鉴[A]. 郭书春主编. 中国科学技术典籍通汇・数学卷[Z]. 第 2 册. 郑州：河南教育出版社，1993：138.

〔2〕周述学. 神道大编历宗算会[A]. 续修四库全书(1043，子部・天文算法类)[Z]. 上海：上海古籍出版社，1995：646.


田畝演段根源圖解

方演段圖

方求積法置方十步自乘得積一百步問合

○張丘建方求斜法置方十步用五歸得二是兩箇方五却用七得斜十四步 故曰方五斜七

若依方五求斜則斜有餘 若依斜七求方則方不足

假如方田隅斜一十四步問積步併方面各若干

答曰積一百步 方面十步

斜演段圖

○張丘建法置斜十四步用七歸得二 乃是二箇斜却用五得十步方面是兩箇方五就以方十步自乘得積一百步 ○有斜必有方只以方求積無差

算法統宗 卷十二

○楊輝斜求方法置方步自乘得一百步是方積一箇 小倍之得二百是兩小方積 用開平方法除之得斜十四步 却有不盡餘實四步

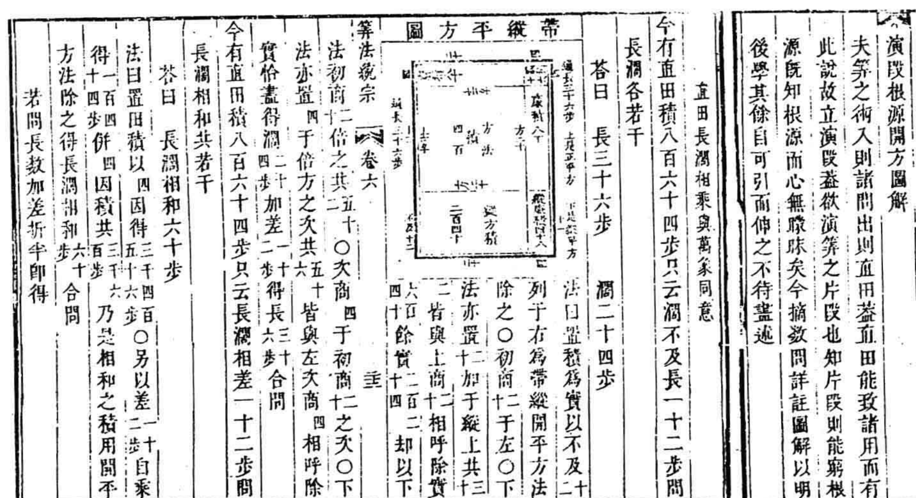
○斜求積法置斜步如大方面自乘得積一百九十六步如斜方兩箇積折半得九十八步 如方積一箇 斜却比前方積步中少二步

○斜求方面置斜步自乘折半得積九十八步 如一箇斜方積以開平方法除之得方面九步九分

方斜演段圖

此論大方一箇方面一十步 內容斜方一箇 即小方也 斜亦一十四步自乘得一百九十六步 是兩箇斜內小方斜積一箇 九十八步 外四角用勾股求弦法得弦九步九分 即如小方面自

图 1.10 《算法统宗》中的“田亩演段根源图解”[1]


演段根源開方圖解

夫算之術入則諸問出則直田蓋直田能致諸用而有此說故立演段蓋欲演算之片段也知片段則能窮根源既知根源而心無暸昧矣今摘数問詳註圖解以明後學其餘自可引而伸之不待盡述

直田長濶相乘與萬象同意

今有直田積八百六十四步只云濶不及長一十二步問長濶各若干

答曰 長三十六步 濶二十四步

法曰置積爲實以不及十二列于右爲帶縱開平方法除之○初商二十于左○下法亦置二十加于縱上共三十二 皆與上商二十相呼除實六百四十 餘實二百二十四 却以下

帶縱平方圖

算法統宗 卷六 圭

法初商二十倍之共四十○次商四于初商二十之次○下法亦置四于倍方之次共四十四 皆與左次商四相呼除實恰盡得濶二十四步 加差一十二步得長三十六步合問

今有直田積八百六十四步只云長濶相差一十二步問長濶相和共若干

答曰 長濶相和六十步

法曰置田積以四因得三千四百五十六步○另以差一十二步自乘得一百四十四步併四因積共三千六百步 乃是相和之積用開平方法除之得長濶相和六十步合問

若問長数加差折半即得

图 1.11 《算法统宗》中的“演段根源开方图解”[2]

〔1〕 程大位. 算法统宗[A]. 郭书春主编. 中国科学技术典籍通汇・数学卷[Z]. 第 2 册. 郑州：河南教育出版社,1993：1318.

〔2〕 程大位. 算法统宗[A]. 郭书春主编. 中国科学技术典籍通汇・数学卷[Z]. 第 2 册. 郑州：河南教育出版社,1993：1318.

所谓“田亩演段根源图解”，是通过将图形的边长、直径按度量单位进行分割，以度量形式解释平面图形的面积公式，与二次方程无关，更与列方程无关。这样处理可能受《田亩比类乘除捷法》卷上内容的影响，误解了杨辉使用演段的意图。

在“演段根源开方图解”中，程大位注释曰：

> 夫算之术，入则诸门，出则直田。盖直田能致诸用而有此说。故立演段，盖欲演算之片段也。知片段，则能穷根源，既知根源，而心无蒙昧矣。今摘数问，详注图解，以明后学，其余自可引而伸之，不待尽述[1]。

这段文字引自杨辉《田亩比类乘除捷法》，但却并注明出处。此注文之后列有一题：已知直田积、长阔差，求长、阔。此题也引自《田亩比类乘除捷法》，并给出带从平方图、减从翻法图，这些演段图旨在揭示开方运算的几何本质，以证明开方运算的正确性。

程大位的“演段”既用在算术题中，也可用在方程题中，但其“演段”，不是用来列方程，而是用来说明解方程的几何本质。

考察明代这三部算书中的演段可知，它们都抄录于杨辉著作，演段方法虽是条段法，但其含义与宋元时期的布列多项式方程的“演段”含义不同，无代数演算之意，显然与受杨辉以演段图解释开方法的误导有关。这一现象表明宋元发达的“演段”代数演算方法在明代消亡了。

1.4　对和算中“演段”意义的考察

“演段”概念和天元术随《算学启蒙》和《杨辉算法》在日本的传播而被和算家所接受，并加以发展。特别是《算学启蒙》中的通过几何图形构建代数关系，以天元术求解数学问题的几何代数化模式，对和算影响最为显著，以致这种代数化几何成为和算一大特色[2]，和算的演段方法与几何问题研究有着密切的关系。

自《算学启蒙》的传入，至《发微算法》（关孝和，1674）的成书（如图

---

〔1〕 程大位.算法统宗[A].郭书春主编.中国科学技术典籍通汇·数学卷[Z].第2册.郑州：河南教育出版社，1993：1318.

〔2〕 徐泽林.吴方法与和式几何研究[J].自然科学史研究，2008，27(4)：471-484.

1.12)，尽管天元术不断出现于江户初期的和算书中，但“演段”概念并未出现。最初使用“演段”这一术语的是关孝和的《发微算法》。该书序称：

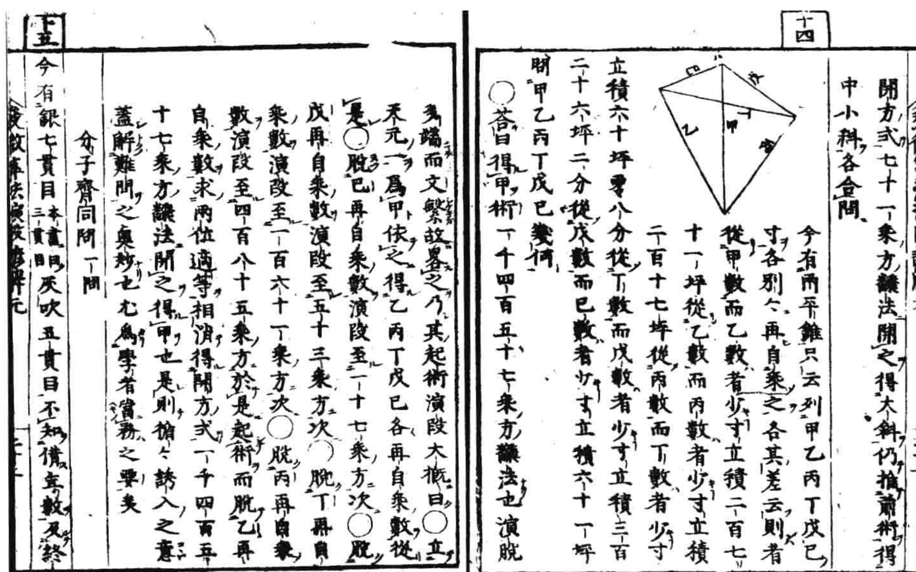

开方式七十一乘方飜法開之得大斜仍推前術得
中小斜各合問
今有兩平錐只云列甲乙丙丁戊己寸各別々再自乘之各其差云則者從甲數而乙數者少寸立積二百七十一坪從乙數而丙數者少寸立積二百十七坪從丙數而丁數者少寸立積六十坪零八分從丁數而戊數者少寸立積三百二十六坪二分從戊數而己數者少寸立積六十一坪
問甲乙丙丁戊己幾何
○答曰 得甲術一千四百五十七乘方飜法也 演脫
爲端而文繁故略之乃其起術演段大概曰○立天元一爲甲依之得乙丙丁戊己各再自乘數從是○脫己再自乘數演段至一十七乘方次○脫戊再自乘數演段至五十三乘方次○脫丁再自乘數演段至一百六十一乘方次○脫丙再自乘數演段至四百八十五乘方於是起術而脫乙再自乘數求兩位適等相消得開方式一千四百五十七乘方飜法開之得甲也是則循々誘入之意蓋解難問之奧妙也亦爲學者當務之要矣
分子齊同問 一問

图 1.12 《发微算法》中的演段[1]

顷岁，算学行于世甚矣。或立其门、或著其书者，不可枚举也。兹有《古今算法记》，设难题一十五问，引而不发矣。尔来四方之算者、虽手之、其理高远而苦难晓。且未睹其答书。予赏有志斯道、故发其微意，注术式，而深藏筥底，以恐外见矣。 我门之学徒咸曰，庶几锓梓广其传，然则为未学之徒，不无小补。仍不顾文理之拙应其需，名曰《发微算法》。至其演段精微之极，依文繁多而事混杂，省略之，犹俟后贤之学者欲正焉而已。于时延宝二岁在甲寅十二月几望、关氏孝和叙[2]。

序中所谓“演段精微之极”，指书中第 14 问求解中推演 1 458 次方程的过程(如图 1.12)。《发微算法》是以天元术解答泽口一之(Sawaguchi Kazuyuki，生卒年不详)所著《古今算法记》(1671)15 个遗题的著作，关孝和把他用天元术推演高次方程的过程称作“演段”，但受篇幅限制，书中没有记

〔1〕 関孝和. 発微算法[M]. 延宝二年(1674). 東北大学図書館狩野文庫藏. 登録号：ws001069，索書号：林文庫 0025.
〔2〕 関孝和. 発微算法[M]. 延宝二年(1674). 東北大学図書館狩野文庫藏. 登録号：ws001069，索書号：林文庫 0025.

录“演段”过程，导致当时的和算家乃至后世的和算史研究者多不明关氏“演段”的意义。

为让世人了解关氏演段过程与演段方法的意义，建部贤弘著《发微算法演段谚解》（贞享二年，1685）（如图 1.13），书中首列“演段起例”：

凡题有见、隐、伏三类，见题以全、折之法随正、变二形求所问；隐题立天元一得真、虚二数求所问。此二题之术《算学启蒙》现其法则。然虽立天元一如意求之，相消数容易而难见，则云伏题也。伏题有单伏、众伏，以记于此书之演段，推时不云单伏、众伏，共得皆术。



图 1.13　《发微算法演段谚解》中的旁书法与演段

如右云相消数难见时，本术以所出者为皆有，别立天元一，画正负段数，旁书其名，如常相消得式。本术出何某幂而演段，立何某时，以自右得式，初廉，次第何某幂、何某三乘幂、何某五乘幂等，迨隅相乘，加入实与方，而成归除式，实自乘寄左，方幂乘何某幂，相消后分正负，求寄左数与相消数而起本术。本术出何某再乘幂而演段，立何某时，以自右得式，次廉、次第何某再乘幂、何某五乘幂、何某八乘幂等，迨隅相乘，加入实、方与初廉，而成平方式，实再自乘、方再乘幂相乘于何某再乘幂、

廉再乘幂相乘于何某五乘幂，三位并而寄左。实方廉相乘，相乘于何某再乘幂，三之，相消后分正负，得本术之求寄左数与相消数。三乘幂以上者，位数繁多，故略之，求之者以消长式得也。

又有求前后两式而用方程正负之术者；也有用维乘之法者；也有用消长式者；也有用加减反复者；也有不立天元一而用分合直术者；各应所得之式，随所问之题而求寄与消，而可起术。诸位遍可约者约之，遍可省者省之，等夹空阶者缩之。

为众伏者，演段之内重几度演段而求之。然半学之徒非口诀得心难成乎？[1]

根据这段“演段起例”所述以及书中演段的算例，可知关孝和的“演段法”包括以下几方面内容：

① 天元术与旁书法：别立天元一，画正负段数，旁书其名，如常相消得式；

② 消长法，即对 $\begin{cases} B - y^k = 0 \\ A_0 + A_1 y + \cdots + A_n y^n = 0 \end{cases}$ 形式的方程组的消元法；

③ 两式，即对 $\begin{cases} A_0 + A_1 y + \cdots + A_n y^n = 0 \\ B_0 + B_1 y + \cdots + B_m y^m = 0 \end{cases}$ 形式的方程组的消元法；

④ 消元过程中还含有正负方程术、维乘法、加减反覆[2]；

⑤ 还有不立天元一而用直接用分合之术[3]的情形。

所谓旁书法，和算家概括为“画正负段数，旁书其名”，即多项式的常系数用算码表示，已知量和未知量的名称用汉字或汉字略书表示，书于常系数的筹码一旁，代数运算变成这些筹码及其旁书的文字符号运算。与欧洲人用拉丁文字作为数学符号表示数学量与数学关系，把代数运算变为符号运算一样，旁书法是一种符号代数。不过，和算旁书法的代数演算是以天元术为中心的，缺少运算符号与关系符号。后来，松永良弼（Matsunaga Yoshisuke，？～1744）对此加以改进而使其成为一般化的代数演算法，又称

[1] 建部賢弘.発微算法演段諺解[M]. 貞享二年(1685). 東北大学図書館狩野文庫藏.登録号：ws001212,索書号：林文庫 0037.

[2] 正负方程术，指《九章算术》中的“方程术”；维乘法即互乘相消法；加减反覆，指两个多项式之间反复加减，以消去某些项。

[3] 分合之术，指多项式的分离与组合。

之为点窜术[1](最上流始祖会田安明(Aida Yasuaki, 1747～1817)为了与关流作区别,把点窜术称作天生法)。

由于天元术的使用,特别是代数化几何问题的日趋复杂化,导致解题过程中需要引进更多的辅助未知数。关孝和根据未知数多少,把数学问题分见题(不用天元术的问题)、隐题(用一个未知数的天元术问题)、伏题(用多个未知数的天元术问题)三类。建部贤弘的“演段起例”称“伏题有单伏、众伏,以记于此书之演段”,表明《发微算法》的演段内容是“单伏、众伏”问题。所谓单伏,指二元方程组,所谓众伏,指三元以上方程组。因此,《发微算法》中的“演段”,主要是以消元为中心的求解多元方程组的代数演算方法。多元方程组消元归结为两个联立的一元高次方程(开方式)之间的消元(和算称之为两式),它可以通过一系列的线性运算转换成齐次的方程组,其系数行列式的终结式就是消元的结果。为此,关孝和在世界数学史上首次引入求行列式终结式的代数演算[2]。《发微算法》之后,《解见题之法》,《解隐题之法》,《解伏题之法》成为关流数学中最基本的数学内容,被称作“三部抄”,两百多年间不断被传抄,又被收录于《大成算经》(1711)。

在关孝和的著作中,“段”是“段数”之略语,也即多项式系数的意思。如《发微算法》第五题:

> 今有甲、乙、丙、丁、戊立方各一,只云甲积与乙积相并,共寸立积七百坪,又丙、丁、戊积各三和,共寸立积五百坪,问甲、乙、丙、丁、戊方面各几何? 乃甲、乙、丙、丁、戊方面之差,各同寸也。
>
> 答曰:依左术,得戊方面。
>
> 术曰:立天元一为戊方面,再自乘之,为戊积,寄子位。列并先云数[三段]与子位[一十五段],得内减又云数[七段],余寄丑位。列并先云数[九段]与又云数[九十一段],得内减子位[二百五十五段],余寄寅位。子位幂、丑位相乘[二千一百八十二万九千五百段],子位、丑位、寅位相乘[一十七万七千三百三十段],右三位相并,得数寄左。子位、寅位幂相乘[六千六

---

〔1〕 又称作归源整法,后来松永良弼受延岡藩主内藤政樹(1703～1766)之命,将其改名为点窜术。点窜的本意是添削的意思,指对文章的加工处理。在对数学式子进行添、削处理时也有似点窜,故用此语。

〔2〕 後藤武史,小松彦三郎. 17 世纪日本と18～19 世纪西洋の行列式、終結式及び判別式[A]. 数学史の研究. 京都大学数理解析研究所講究録(1392)[C],2004: 117 - 129.

百段]，寅位再自乘[四十九段]，右二位相并，得数与寄左相消，得开方式，八乘方开之，得戊方面。仍推前术，得甲、乙、丙、丁方面，各合问[1]。

其中把 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n$ 或 $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n = 0$ 的系数 a_i 称作"段数"。

延宝（1673～1680）至宝永（1704～1710）年间，是和算发展的鼎盛时期，也是以天元术为中心的代数学发展的重要时期，其间出现的和算书大多以天元术为中心，主要有

《发微算法》（关孝和，1674）

《算法明解》（田中由真，1678）

《研几算法》（建部贤弘，1683）

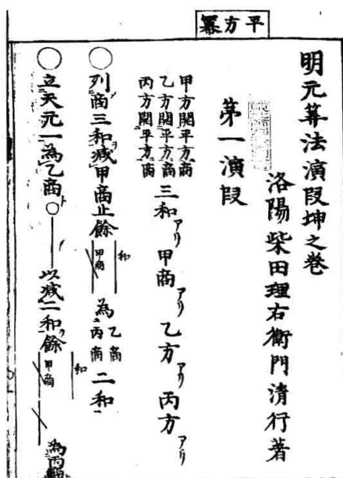
《发微算法演段谚解》（建部贤弘，1685）

《三部抄》（关孝和，1685 年前后）

《明元算法》（宫城清行，1689）（如图 1.14）

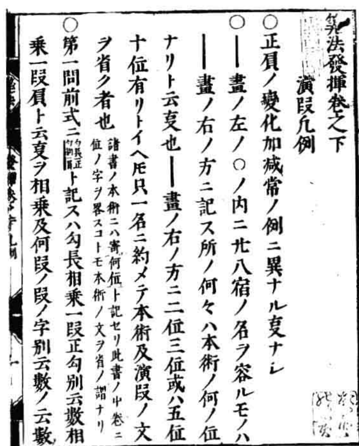
《一極算法》（安藤吉治，1689）

《算法发挥》（井关知辰，1690）（如图 1.15）



平方冪
明元算法演段坤之巻
洛陽柴田理右衛門清行著
第一演段
甲方闊平方商
乙方闊平方商
丙方闊平方商
三和アリ　甲商アリ　乙方アリ　丙方アリ
○列商三和減甲商止餘　為乙丙商二和
○立天元一為乙商　以減二和餘　為丙商

图 1.14 《明元算法》(1689)中的演段[2]



算法發揮巻之下
演段凡例
○正負ノ變化加減常ノ例ニ異ナル㕝ナレ
○━畫ノ左ノ○ノ内ニ廿八宿ノ名ヲ容ルモノハ
━畫ノ右ノ方ニ記ス所ノ何々ハ本術ノ何ノ位
ナリト云㕝也━畫ノ右ノ方ニ二位三位或ハ五位
十位有リトイヘトモ只一名ニ約メテ本術及演段ノ文
ヲ省ク者也　諸書ノ本術ニハ寄何位ト記セリ此書ノ中巻ニ位ノ字ヲ略スコトモ本術ノ文ヲ省ノ謂ナリ
○第一問前式ニ　ト記スハ勾長相乗一段正勾別云數相
乗一段負ト云㕝ヲ相乗及何段ノ段ノ字別云數ノ云數

图 1.15 《算法发挥》(1690)中的演段[3]

〔1〕 関孝和. 発微算法[M]. 延宝二年(1674). 東北大学図書館狩野文庫藏. 登録号: ws001069, 索書号: 林文庫 0025.

〔2〕 柴田清行. 明元算法[M]. 元禄二年(1689). 東北大学図書館狩野文庫藏. 登録号: ws007147, 索書号: 林集書 0409.

〔3〕 井関知辰. 算法発揮[M]. 元禄三年(1690). 東北大学図書館狩野文庫藏. 登録号: ws005624, 索書号: 岡本刊 063.

《算学启蒙谚解大成》(建部贤弘，1690)

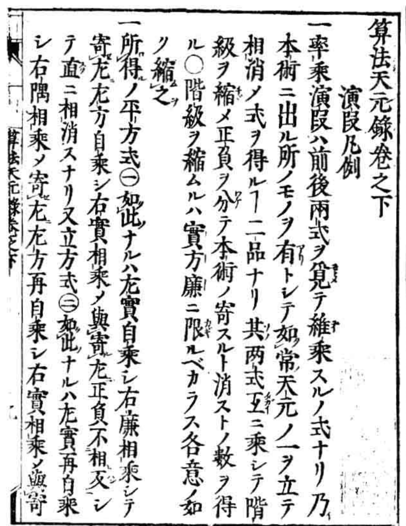
《七乘幂演段》(中根元圭，1691)

《和汉算法》(宫城清行，1695)

《算法天元录》(西胁利忠，1697)(如图 1.16)

《算法天元指南》(佐藤茂春，1698)

《算法天元樵谈录》(中村政荣，1702)



算法天元錄卷之下

演段凡例

一 率乘演段ハ前後兩式ヲ覓テ維乘スルノ式ナリ乃本術ニ出ル所ノモノヲ有トシテ如常天元ノ一ヲ立テ相消ノ式ヲ得ルヿ二品ナリ 其兩式互ニ乘シテ階級ヲ縮メ正負ヲ分テ本術ノ寄スルト消ストノ數ヲ得ル〇階級ヲ縮ムルハ實方廉ニ限ルベカラス各意ノ如ク縮之

一 所得ノ平方式㊀如此ナルハ左實自乘シ右廉相乘シテ寄左左方自乘シ右實相乘メ與寄左正負不相叉シテ直ニ相消スナリ又立方式㊁如此ナルハ左實再自乘シ右隅相乘メ寄左左方再自乘シ右實相乘メ與寄

图 1.16 《算法天元录》(1697)中的演段[1]

这些天元术著作普遍使用“演段”概念，其意义与关氏演段大体相同，即解伏题的代数演算，而且使用的代数学术语也基本一致，如中村政荣（Nakamura Seiei，？～1746)在《算法天元樵谈集》(1702)中释天元术曰：

> 天元术不好刻事，适等而相消也。适等立虚真二数，或加或减，两位同数而相消，故自然解好问。见题全折法而寻求归除、相乘、平方、立方等，故不能解难问。今天元隐题而名其所问者，立天元一，相加、相减、自乘、相乘而相消，故不求得平方、立方、三乘方、以下，以解难问，术有单伏、众伏，旁几立，未生一，得幂式，两式演段，以起本术天元[2]。

为何关流以外的和算家也使用旁书法和演段术，他们是独创还是来源于关流数学，尚不明确。就著作时间而言，关氏《发微算法》为早，故建部贤弘在《发微算法演段谚解》中称：“抑此演段，和汉算者未所发明也，诚可谓师之新意之妙旨，冠绝古今也。”[3]明确指出演段法为关孝和所创。笔者认为，关流以外和算家的演段法当来源于关流著作。

---

[1] 西脇利忠. 算法天元録[M]. 元禄十年(1697). 東北大学図書館狩野文庫藏. 登録号：ws005542，索書号：林集書 1234.

[2] 中村政栄. 算法天元樵談集[M]. 元禄十五年(1702). 東北大学図書館狩野文庫藏. 登録号：ws001165，索書号：林文庫 0059.

[3] 建部賢弘. 発微算法演段諺解[M]. 貞享二年(1685). 東北大学図書館狩野文庫藏. 登録号：ws001212，索書号：林文庫 0037.

除用于解伏题场合外，和算“演段”概念还在其他数学问题中使用，例如关孝和的《括要算法》(1712)中就有“角术演段”(如图 1.17)和“诸乘垛演段”(如图 1.18)。

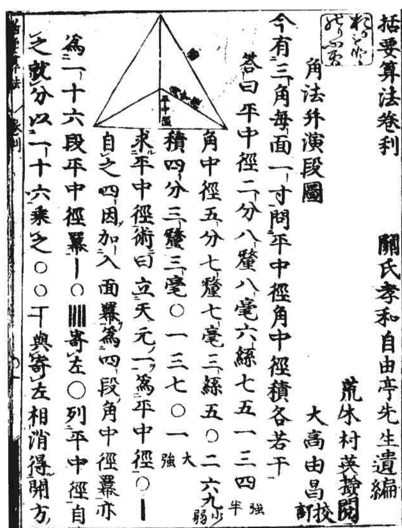

括要算法卷利　關氏孝和自由亭先生遺編
荒木村英撿閲
大高由昌訂校
角法并演段圖
今有三角每面一寸問平中徑角中徑積各若干
答曰平中徑二分八釐八毫六絲七五一三四強半
角中徑五分七釐七毫三絲五〇二六九少弱大
積四分三釐三毫〇一三七〇一強
求平中徑術曰立天元一為平中徑〇|
自之四因加入面冪為四段角中徑冪亦
為二十六段平中徑冪|〇||||寄左〇列平中徑自
之數以一十六乘之〇〇丅與寄左相消得開方

图 1.17　《括要算法》中的角术演段[1]

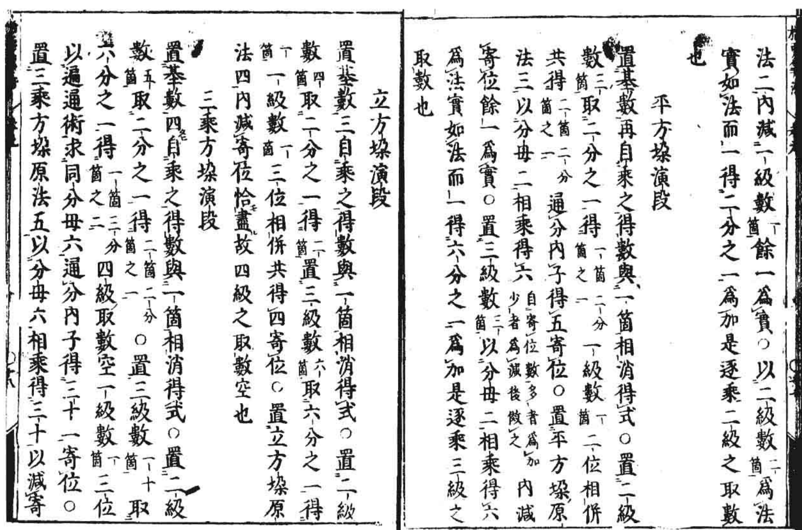

法二內減一級數一箇餘一為實〇以二級數二箇為法
實如法而一得二分之一為加是逐乘二級之取數
也
平方垜演段
置基數再自乘之得數與一箇相消得式〇置二級
數三箇取二分之一得一箇二分之一　一級數一箇二位相併
共得二箇之二　通分內子得五寄位〇置平方垜原
法三以分母二相乘得六自寄位數多者為加少者為減後做之內減
寄位餘一為實〇置三級數三箇以分母二相乘得六
為法實如法而一得六分之一為加是逐乘三級之
取數也
立方垜演段
置基數三自乘之得數與一箇相消得式〇置二級
數四箇取二分之一得二箇置三級數六箇取六分之一得
一箇一級數一箇三位相併共得四寄位〇置立方垜原
法四內減寄位恰盡故四級之取數空也
三乘方垜演段
置基數四自乘之得數與一箇相消得式〇置二級
數五箇取二分之一得二箇二分之一　〇置三級數十箇取
六分之一得一箇三分之二　四級取數空一級數一箇三位
以通通術求同分母六通分內子得三十一寄位〇
置三乘方垜原法五以分母六相乘得三十以減寄

图 1.18　《括要算法》中的垛积演段[2]

〔1〕 関孝和. 括要算法[M]. 正徳二年(1712). 東北大学図書館狩野文庫藏. 登録号：ws000929，索書号：岡本刊 089.

〔2〕 関孝和. 括要算法[M]. 正徳二年(1712). 東北大学図書館狩野文庫藏. 登録号：ws000929，索書号：岡本刊 089.

所谓角术，即给出正多边形(角形)边长 a(面)，寻求边长 a 与外接圆半径 R(角中径)、内切圆半径 r(平中径)之间的代数关系以列出以下系列的代数方程式，解这些方程式而求外接圆半径 R 和内接圆半径 r。

三角：$1-12r^2=0,\ 1-3R^2=0$；

四角：$2r=a,\ -1+2R^2=0$；

五角：$-1+40r^2-80r^4=0,\ -1+5R^2-5R^4=0$；

六角：$-3+4r^2=0,\ R=a$；

七角：$-1+84r^2-56r^4+448r^6=0,\ -1+7R^2-14R^4+7R^6=0$；

八角：$-1-4r+4r^2=0,\ -1+4R^2-2R^4=0$；

九角：$-1+132r^2-432r^4+192r^6=0,\ -1+6R^2-9R^4+3R^6=0$；

十角：$5-40r^2+16r^4=0,\ -1-R+R^2=0$；

十一角：$-1+220r^2-5\,280r^4+29\,568r^6-42\,240r^8+11\,264r^{10}=0$，

$-1+11R^2-44R^4+77R^6-55R^8+11R^{10}=0$。

这一场合，演段虽并非消元演算，但其演算核心仍然是推演代数方程式的代数演算，以说明这些角术公式的由来。

在垛积术场合，诸乘垛演段主要是推演关于底子(项数)n 的垛积公式

$$S_p(n-1)=\frac{1}{p+1}\sum_{k=0}^{p}\binom{p+1}{k}B_k n^{p-k+1}$$

这些垛积公式也是多项式，所以垛积演段仍然是推演多项式的代数演算，以说明各种垛积公式的由来。

关流《伏题免许目录》中除“伏题演段”外，还有其他问题的演段，例如学士院所藏藤田贞资(Fujita Sadasuke，1734～1807)抄写的关流免许目录如下：

第一见题免许

卷首

河图、洛书、三成、大极、四象、大数、小数、诸率、算法草术、加减乘除之法；开除法、九章、平垛解术、圆法玉率及弧矢弦玉欠论、诸法根源、

诸法慎始、统术、点窜、筹策、一算盈朒、之分法、统术解、同秘传、同目录之解、单伏点窜、再乘和门、总括、见题蕴奥。

第二隐题免许

太极、全积门、差分门、因积门、勾股门、互换门、形容门、截积门、收约门、杂式门、诸角门、分合、形写兑换盈缩、勾股变化之法、隐题蕴奥。

第三伏题免许

无极、单伏演段、众伏演段、单伏起术、维乘、两式演段、方程演段、交商、商一演段、因府、消长又曰加减反复、起率演段、两义式、潜伏式、造化式、诸角经术、解伏题蕴奥、交式斜乘之解[1]。

其中“方程演段”、“商一演段”、“起率演段”等都与消元法无关,用法与《括要算法》之“角法演段”、“诸乘垛演段”的用法相类,多系与多项式有关的代数演算,主要用来说明“算法”的由来,有时又被称作“解义”。

其实,在《发微算法》中关孝和并没有明确限定“演段”概念只用于解伏题,也就是说,用天元术和消元法解答《古今算法记》的15个遗题是演段,但并不意味只有这种场合的代数演算才是演段。建部贤弘在《发微算法演段谚解》“演段起例”称“伏题有单伏、众伏,以记于此书之演段”,只是说明《发微算法》中的演段内容是“单伏、众伏”问题,并没有说明演段只是“单伏、众伏”问题。他后来在《大成算经》中又对演段法进一步解释道:“演段者,述隐、伏、潜之题之术也。”[2]由此可见,演段就是解隐题、伏题、潜题的数学方法。其中隐题、伏题需要使用天元术,潜题,为指数函数、三角函数等非代数关系的数学问题,与消元法无关,也未必使用天元术。通过《大成算经》卷二十的“潜题演段例”可以看出,其演段概念具有“解义”之意。

自关孝和《发微算法》之后,演段概念广泛地使用于和算书中,其用法和意义多与天元术、解伏题、解义、点窜有关。表1.1列出部分和算书中演段的意义。

---

〔1〕 学士院藏. 関流免許目録. 另见:三上義夫. 関流数学の免許階段の制定と変遷[J](上). 史学. 1931,10(3):13-24.

〔2〕 関孝和,建部賢明,建部賢弘編集. 大成算經[M]. 卷二十. 抄本. 東北大学図書館狩野文庫藏. 登録号:ws006478,索書号:狩野 7.20820.20.

表1.1　部分和算书中演段的意义

和　算　书	出现演段的地方	演段的意义
《发微算法》(关孝和,1674)	序,十四问演段	旁书法、天元术、消元法
《算法明解》(田中由真,1678)	卷下附录“交和演段诸式”	旁书法、天元术、消元法
《明元算法》(柴田清行,1689)	序,坤卷各题演段	旁书法、天元术、消元法
《一极算法》(安藤吉治,1689)	序,各乘演式	旁书法、天元术、消元法
《大成算经》(建部贤弘,1711)	卷19,卷20伏题演段、潜题演段	旁书法、天元术、消元法、解义
《发微算法演段谚解》(建部贤弘,1690)	卷首演段起例	旁书法、天元术、消元法
《算法发挥》(井关知辰,1690)	下卷“演段凡例”七问演段	旁书法、天元术、消元法
《七乘幂演式》(中根元圭,1691)	全书,七乘演式	旁书法、天元术、消元法
《和汉算法》(宫城清行,1695)	卷首“演段定例”、书末“古今算法记十五问答术起源演段”	旁书法、天元术、消元法
《解伏题之法》(关孝和,1683)	全书	旁书法、天元术、消元法
《算法天元录》(西胁利忠,1697)	卷下“率乘演段式”	旁书法、天元术、消元法
《算术志元录》(藤井直好,1699)	卷首天元术释例	旁书法、天元术、消元法
《算法天元樵谈集》(中村政荣,1702)	第二卷	旁书法、天元术、消元法
《缀术算经》(建部贤弘,1722)	探立元法：解题演段术	天元术
《括要算法》(关孝和,1712)	元卷：角术演段、垛积演段	多项式代数演算、解义
《久留岛极数术》(久留岛义太)	术后演段	多项式代数演算、解义
《勾股变化之法》(松永良弼)	用例中用天元术,出现演段	天元术、解义
《算法集汇》(松永良弼)	剥脱演段正编	天元术解剥脱问题
《集汇算法》(松永良弼)	倍垛术：演段总图	垛积演段、解义
《算法集成》(松永良弼)	勾股弦无不尽法：起术演段	点窜术、天元术、解义
《拾玑算法》(有马赖徸,1769)	点窜术、演段	点窜术
《算法学海》(坂正永,1781)	上卷：天元术演段	旁书法、天元术、消元法

松永良弼在旁书法中引入分式表示法后,丰富了和算符号代数方法,旁书法因此而被称作点窜术。至于如何理解点窜术与演段的关系,我们可以分析有马赖徸(Arima Yoriyuki, 1714～1783)《拾璣算法》(1769)(如图1.19)中关于“点窜术”的解释:

所谓点窜者,临题施术之始,正术路、审技巧之法也。故自天元演

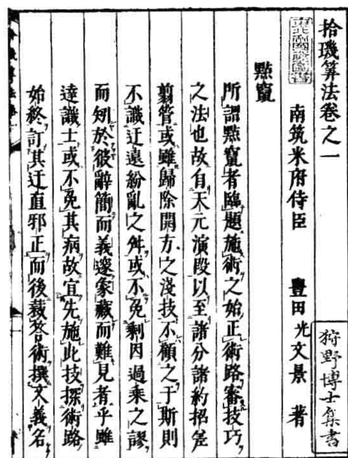

拾璣算法卷之一
南筑米府侍臣　豊田光文景　著
狩野博士集書
點竄
所謂點竄者臨題施術之始正術路審技巧
之法也故自天元演段以至諸分諸約招差
翦管或雖歸除開方之淺技不顧之于斯則
不識迂遠紛亂之弊或不免剩因過乘之謬
而矯於彼辭簡而義邃象藏而難見者乎雖
達識士或不免其病故宜先施此技探術路
始終訂其迂直邪正而後裁答術撰文義名

图 1.19 《拾璣算法》(1769)中的点窜术演段[1]

段,以至诸分、诸约、招差、剪管,或虽归除、开方之浅技,不顾之于斯,则不识迂远纷乱之桀,或不免剩因、过乘之谬而矫于彼,辞简而义邃,象藏而难见者乎,虽达识士或不免其病,故宜先施此技探术路始终,订其迂直邪正而后裁答术撰文[2]。

此处将"天元"、"演段"连用,表明演段多与天元术的使用有关,而点窜术应用的范围包括天元演段、诸分、诸约、招差、剪管、归除、开方等等,说明所有数学问题都可以使用点窜术。

综上可知,和算"演段"概念的使用出现于两种情形,一种情形是使用天元术和旁书法进行消元的代数演算。其演段的演算包含立天元一、多项式的加、减、乘、乘幂的演算,其"段"的意思,指普通的数、指多项式的系数,这是和算"演段"概念的狭义意思。另一情形与消元无必然关系,指说明解题之"术"由来的推演过程,其推演过程多为代数演算,此时的"演段"也被称作"解义",它是和算"演段"概念的广义意思。其实,和算著作形式是:题问、答、术。对于伏题来说,其"术"是一个一元 n 次方程,为说明"术"的一元 n 次方程是如何推演出来(消元)的演段,作用仍然是"解义"。

1.5 "演段"概念的内涵及其演变

演,通"衍"。如王弼《易・系辞大衍注》曰:演天地之数。具有"推演"的意思。在数学上,常用作:演证(即推演证明)、演绎法(即演绎推理)、演示(用实例或实际操作进行显示或证明)、演算(按一定原理和公式计算)等。

条,本义是名词,本义为"小枝",又可动词化使用,如用作:条写(分条书

---

〔1〕 有馬頼徸. 拾璣算法[M]. 明和六年(1769). 東北大学図書館狩野文庫藏. 登録号: ws001601, 索書号: 狩野 7.31413.5.
〔2〕 有馬頼徸. 拾璣算法[M]. 明和六年(1769). 東北大学図書館狩野文庫藏. 登録号: ws001601, 索書号: 狩野 7.31413.5.

写)、条晰(分条叙明)、条具(分条开列)、条述(分条叙述)、条列(分条列举)、条白(分条陈明)、条分缕析等。

段,本义为动词,锤击的意思,引申为分段、截断的意思。名词化而指事物或时间的一节、一部分。如用作:地段、阶段、身段、时段等。东亚传统数学中,“段”的本义来源于田亩的计数,常叙之曰“今有方田一段”,“今有圆田一段”等。在使用“条段法”场合,指平面图形(二维图形)的数量,如曰:“直田四段、黄方一段”;在使用“天元术”和“四元术”场合,被引申为一般几何量(任意维度的图形)的数量,如曰:“一百二十二段平,以长乘之,为一百二十二段积”;“三段方台积、四段圆台积、四段立方积”等,有时又被称作“段数”,它是方程式(或多项式)的常系数;在和算点窜术演算场合,“段”的意义又被进一步引申,指通常的数,为多项式的系数。段,即“段数”的略语。如曰:“子位、寅位幂相乘,六千六百段,寅位再自乘,四十九段。”

从字面上看,在“条段”与“演段”这两个词中,“条”和“演”都是动词,它们的动作对象都是“段”。条段,就是条出段数;演段,就是演出段数。以条段法进行演段时,演就是演示的意思,以天元术和点窜术进行演段时,演就是演算的意思。因此,“演段”可解释成:推演方程式或多项式系数的演算。其演算包含立天元一、多项式的加、减、乘、乘幂等运算。“演段”概念的外延要比“条段”概念的外延要广。

和算解伏题场合,使用天元术和旁书法进行消元演算,关孝和将其演算过程称作演段,建部贤弘将其方法程式化,从而出现演段术即消元法的狭义意义。这种场合,演段常被称作“演脱”。

和算家把解释“术”的由来和方法形成的过程,称作“解义”,有时也称作“演段”,于是就出现林鹤一“演段即解义”的广义解释。由于天元术、旁书法的应用,使多项式演算在和算研究中更为普遍,或者说,和算的一切演算都是以代数式演算为中心的。因此,数学问题的解决过程,就是代数演算过程,也就是“演段”过程,未必与消元有关。所以这种场合的演段的基本意义没有改变,仍然是以多项式为中心的代数演算[1]。和算“点窜”概

〔1〕 徐泽林. 中算机械化思想在和算中的发展——解伏题的机械化特征[J]. 自然科学史研究, 2001,20(2): 120 - 131.

念的外延要比“演段”概念的外延要广，点窜指符号代数方法，包括演段场合和非演段场合的一切数学演算，包括旁书法、天元术、消元法等所有代数方法。

演段概念的变化，反映代数方法的进步，表现为其抽象程度的增高，处理的数学问题的范围的扩大。比较如下：

代数演算的方法：条段法→天元术→点窜术；

处理的数学对象：直田、二次方程→n 次方程→一般的代数问题；

代数演算的对象：量、图形→数、天元式→数、天元式、符号。

中国古代数学中的二次方程是由勾股问题引出的，以二次方程解答数学问题需要解决两方面的问题，一是列方程，一是求方程的数值解。对于后者，有“开方术”算法程序，因此，如何列方程，是中国古代数学家所面临的一个重要课题。

三国时期，赵爽、刘徽等人根据出入相补原理，通过平面图形的面积变换来进行代数表示和代数演算，由此来建立二次方程式。隋唐时期，王孝通将其推广至三维的立体情形，以布列三次方程式。北宋时期，中国数学家们意识到代数方程在解决数学问题中的巨大作用，对探索列方程以及求解高次方程的有效方法有着浓厚的兴趣，推动了代数学在宋元时期的发展。他们开始采用刘徽、赵爽等人的几何方式建立条段法，以解决列二次方程的代数演算问题，使方程系数有所突破。这种代数分析方式可名之为“几何化的代数分析”。金元时期，创立天元术和四元术，导致代数性质随之发生变化，从条段法的几何直观演变成天元式的形式化与抽象化，代数意义更加广泛，从而高次方程与多元方程组应运而生。宋元数学家把以条段法、天元术、四元术进行的代数演算，都称作“演段”。这种以天元术为中心的代数分析方式可名之为“天元术的代数分析”。明代数学家通过杨辉著作接触到演段概念，但由于天元术失传，加之杨辉对演段的模糊表述和泛化使用，使他们曲解了演段的代数意义，仅把条段法应用于开方法的几何解释。17 世纪的和算家通过《算学启蒙》接受了天元术方法和演段这一术语，并在天元术的基础上加以改造，形成了演段术与点窜术，在天元式代数表示方法和演算方法中，加入旁书符号与消元法，丰富了演段概念的内涵。但是，演段作为以多项式（或多项式方程）为演算对象的代数分析法的本质没有改变。

通过以上梳理和分析，可以将东亚数学中“演段”概念及其代数分析方法形成的历史脉络如图 1.20 所示。

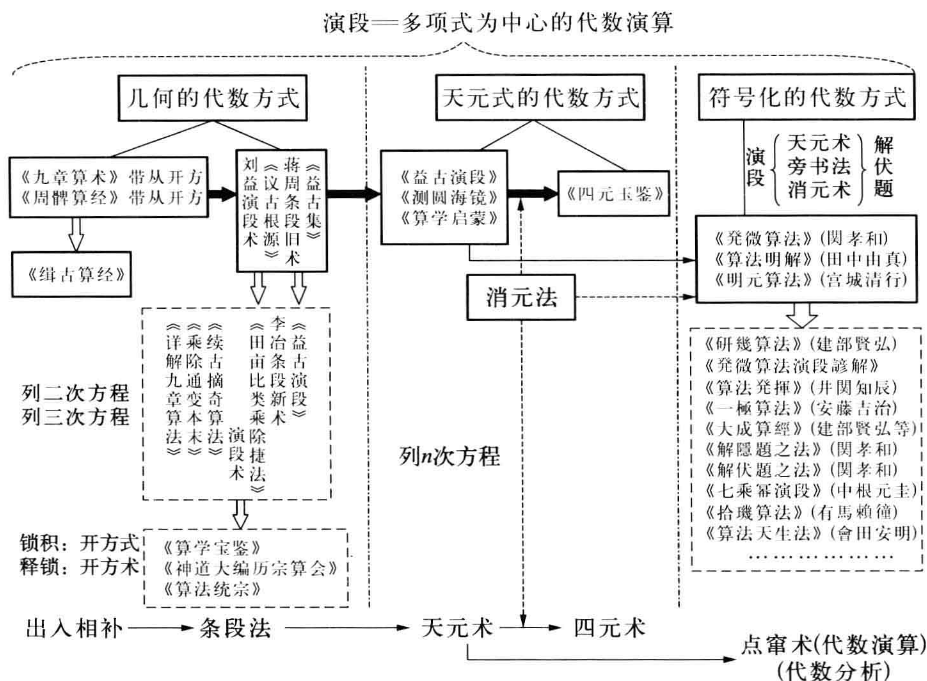


图 1.20　东亚“演段”概念演变示意图

1.6　从“演段”概念的演变看东亚代数演算方式的发展及其意义

通过对中日传统数学中“演段”概念及方法的历史考察和分析，可以看出，“演段”概念在不同时代，其内涵、使用方式、使用范围都有差异，并随时代变迁而不断变化，但其以多项式(或多项式方程)为演算对象的代数分析的本质没有改变。

在西方数学文化中，希腊人将几何与算术作为两门学科，使“形”与“数”截然分开，导致希腊代数学的不发达，直至文艺复兴后，在阿拉伯代数学的影响下，笛卡儿、韦达等近代数学家才开始有意识地把代数分析引入几何研究，使西方近代数学走上代数分析的道路，以至现代数学仍然承袭这样的代数分析传统。

从《九章算术》时代开始，中国数学家就把“形”与“数”有机地结合在一

起，以代数方式处理各类问题，导源于“少广”和“勾股”的代数方程算法成为中国传统代数学的核心。刘益认为数学“入则诸门，出则直田”，其所谓的直田，即《议古根源》中用直田形式演段的二次方程问题（即节题匿积或锁方），故其所言之意涵是，列二次方程、解二次方程问题是数学中的核心问题。杨辉接受了他的观点，把非几何类问题比类为直田问题，化成二次方程求解，从而认为“开方乃算法之大节目”。这种思想与和笛卡儿（Rene Descartes，1596～1650）所倡导的一切数学问题归结为解方程问题的思想颇为类似。换句话说，笛卡儿把数学问题归结为代数问题，把代数问题归结为解方程问题，更具东方数学色彩。不过，由于刘益采用的条段法受几何直观的限制，所处理的代数问题还十分有限。随天元术与四元术的代数方法的形成，宋元数学在高次方程与多项式演算方面获得长足进步，构筑了东亚代数学的基础，也使宋元数学开始出现抽象化的倾向和形式化演算的倾向[1]。和算在宋元代数学基础上，引入代数符号，把天元术发展成点窜术，使以天元术为核心的东亚代数方法进一步抽象而更具一般性，在和算中发挥了巨大作用，真正实现了刘益、杨辉等宋代数学家所提倡的代数分析思想。可以认为，演段是东亚传统数学中的代数分析法。17 世纪的欧洲数学和东亚数学几乎同时相互独立地出现代数分析的倾向和努力，这是历史的必然吗？值得我们去思考。

---

〔1〕 徐泽林. 吴方法与和式几何研究[J]. 自然科学史研究，2008，27(4)：471－484.

第 2 章
代数方程的数值解法：开方术*

解方程是汉字文化圈传统数学中的中心问题，在汉代《九章算术》"少广章"的开方术基础上发展起来的代数方程数值解法，到 11 世纪达到了顶峰，形成了立成释锁开方术与增乘开方术，并出现了刘益等人的正负开方术。元代末年之后，这类问题随天元术代数方法的失传而在中国本土发展式微，甚至倒退，增乘开方术与正负开方术在明代失传，入清后，"梅文鼎(1633～1721)《少广拾遗》依开方作法本源图重新发挥立成释锁之作用，但仅能为《算法统宗》、《同文算指》等书补阙，而不能继承秦九韶(1202? ～1261)正负开方术而有所发展"[1]。直至清代乾嘉时期兴起对古典数学整理运动，在西学刺激下才出现汪莱(1768～1813)、李锐(1769～1817)等人在解方程方面的新成果，然而与西方近代方程论的水平尚有一些距离。西方人在中世纪阿拉伯代数学基础上发展起来的解方程算法，到 16、17 世纪出现了飞快发展，成就了近代代数学的发达。对于中西方数学在这方面的差异，常为学界所注目，试图寻找造成这种逆转的原因。17 世纪的和算家们非常幸运地接触并继承了宋元代数学，在其基础上固守东方数学传统而独立地发展了古代方程理论，不仅创立了与秦九韶—霍纳法一致的代数方程数值解法的算法程序，而且创立了牛顿迭代法与牛顿二分法，同时还建立了方程求解的理

---

* 本章主要内容曾发表于《自然科学史研究》(1999,18(3)：206－221)。

[1] 钱宝琮. 中国数学史[M]. 北京：科学出版社，1992：254.

论。本章首先简略介绍中国开方术传统及其在日本的传播，其次以关孝和的开方术为中心，比较中日方程论的成就及其成因，以揭示东亚传统代数方程论的基本特征与算法性质，最后介绍久留岛义太(Kurushima Yoshihiro，？～1757)的方程求解算法。

2.1 中国古代的开方术与增乘开方术

开方术最早出现于《九章算术》之“少广”章，包括开平方与开立方两种算法。其开平方术曰：

置积为实，借一算，步之，超一等，议所得，以一乘所借一算为法，而以除，除已，倍法为定法，其复除，折法而下，复置借算，步之如初，以复议一乘之，所得副以加定法，以除，以所得副从定法，复除，折下如前……[1]

其开立方术曰：

置积为实，借一算步之，超二等，议所得，以再乘借一算为法，而以除，除已，三之为定法，复除，折而下，以三乘所得数置中行，复借一算置下行，步之，中超一，下超二等，复置议，以之一乘中，再乘下，皆副，以加定法，为法而除，除已，倍下并中从定法，复除，折下如前……[2]

《九章算术》之后，开方术一直在中国流传，成为中国数学中最基本的算法之一，也是中国传统数学的最基本内容，南北朝时期的数学著作多有继承，《孙子算经》通过具体算例，说明开方术的演算过程，与《九章算术》基本一致，其问题及算法程序记载如下：

今有积二十三万四千五百六十七步，问方几何？

术曰：置积二十三万四千五百六十七步为实，次借一算为下法，步之，超一位，至百而止。上商置四百于实之上，副置四万于实之下、下法之上，名为方法；命上商四百除实，除讫，倍方法，方法一退，下法再退，复置上商八十以次前商，副置八百于方法之下、下法之上，名为廉法；

〔1〕 郭书春校注. 九章算术[M]. 沈阳：辽宁教育出版社，1998：266－267.
〔2〕 郭书春校注. 九章算术[M]. 沈阳：辽宁教育出版社，1998：272－273.

方、廉各命上商八十以除实，除讫，倍廉法，从方法，方法一退，下法再退，复置上商四以次前，副置四于方法之下、下法之上，名曰隅法；方、廉、隅各命上商四以除实，除讫，倍隅法，从方法，上商得四百八十四，下法得九百六十八，不尽三百一十一，是为方四百八十四步九百六十八分步之三百一十一[1]。

南北朝时期的《张丘建算经》也载有开方术内容，其卷中第十九题为开平方问题，题问及术文如下：

今有田积一十二万七千四百四十九步，问方几何？

术曰：以开方除之即得。

草曰：置前积步数于上，借一算子于下，常超一位，步至百而止。以上商置三百于积步之下、下法之上，名曰方法。以方命上商，三三如九，除九万，又倍方法，一退，下法再退，又置五十于上商之下，又置五百于下法之上，名曰隅法。以方、隅二法除实，余有四千九百四十九。又倍隅法以并方，得七千，退一等，下法再退，又置七于上商五十之下，又置七于下法之上，名曰隅法。以方、隅二法除实，得合前问[2]。

其卷下第三十题为开立方问题，其题问及术文如下：

今有立方九十六尺，欲为立圆，问径几何？

术曰：立方再自乘，又以十六乘之，九而一，所得开立方除之，径得圆径。

草曰：置九十六，再自乘，得八十八万四千七百三十六，又以十六乘之，得一千四百一十五万五千七百七十六，以九除之，得一百五十七万二千八百六十四，以立方法除。借一算子于下，常超二位，步至百而止。商置一百，下置一百万于法之上，名曰方法。以法命上商一百，除实一百万。方法三因之，得三百万，又置一百万于方法之下，名曰廉法，三因之，方法一退，廉法再退，下法三退。又置一十于上商一百之下，又置一千于下法之上，名曰隅法。以方、廉、隅三法皆命上商一十，除实毕。又倍廉法，三因隅法，皆从方法。又置一百一十于方法之下，三因之，名曰廉法。方法一退，廉法再退，隅法三退，又置六于上商之下，又置六于下法之上，名曰

〔1〕 钱宝琮校点. 算经十书[M]. 下册. 北京：中华书局，1963：301.
〔2〕 钱宝琮校点. 算经十书[M]. 下册. 北京：中华书局，1963：301.

隅法。乃自乘得三十六，又以六乘廉法，得一千九百八十五，方、廉、隅三法皆命上商六，除之，除实毕，倍廉法，三因隅法，皆从方。得一百一十六尺四万三百六十九分尺之一万一千九百六十八，合问[1]。

公元11～13世纪，中国的开方术出现新的进步，首先是方程系数突破正数的限制，代数化程度不断增高。11世纪，“刘益以勾股之术治演段锁方，撰《议古根源》二百问，带益隅开方，实冠前古”[2]，他所处理的负系数方程有两种类型，一种是一次项系数为负数的方程，如$x^2-12x=864$，另一种是二次项系数为负数的方程，如$-x^2+60x=864$，刘益把前者的一次项系数称作“负方”，把后者的二次项系数称作“益隅”，并给出“益积术”和“减从术”这两种对应的方法来解这些方程，而且在开方过程中如果遇到减根变换后“实”的正负号发生改变时，他称之为“翻积”。

与刘益同时代的贾宪把开平方、开立方方法推广到开任何次方，处理的是具有一般形式

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+a_{n-3}x^{n-3}+\cdots+a_2x^2+a_1x=a_0$$
$$(a_n\neq 0,\ a_0>0)$$

的高次方程，给出了立成开方和增乘开方的算法程序。

南宋数学家杨辉《详解九章算法纂类》转载其立成释锁平方法曰：

置积为实，别置一算，名曰下法，于实数之下，自末位常超一位，约实，置首尽而止。实上商置第一位得数，下法之上亦置上商，为方法。以方法命上商，除实，二乘方法为廉法，一退，下法再退。续商第二位得数于廉法之次，照上商置隅，以廉、隅二法皆命上商，除实。二乘隅法，并入廉法，一退，下法再退……[3]

《详解九章算法纂类》转载其立成释锁立方法曰：

置积为实。别置一算，名曰下法。于实数之下，自末位至首，常超二位。上商置第一位得数，下法之上，亦置上商，又乘置平方，命上商除实讫[取用第二位法]。三因平方，一退，亦三因从方面，二退为廉，下法三

[1] 钱宝琮校点. 算经十书[M]. 下册. 北京：中华书局，1963：301.
[2] 杨辉. 算法通变本末[M]. 卷上，丛书集成本. 北京：商务印书馆，1936：3.
[3] 杨辉. 详解九章算法纂类[M]. 丛书集成本. 北京：商务印书馆，1936：36.

退。续商第二位得数，下法之上，亦置上商，为隅。以上商数乘廉、隅，命上商除实讫[求第三位即如第二位取用……][1]

“释锁”是宋元时期“开方”的代名词，代数方程被称做“锁积”。所谓立成，就是数表，所以，立成开方法就是利用二项展开式系数表（贾宪三角）进行开方，根据杨辉记载，贾宪在其《黄帝九章算法细草》中给出了这张数表，即“开方作法本源图”。对于 n 次方程，开出第一次商之后作减根变换，则方程系数发生变化，变化规律呈贾宪三角的第 n 层数列，即 $(1+x)^n$ 展开式的系数。

贾宪又给出开 n 次方的增乘开方术，其法曰：

> 实上商置第一位得数，以上商乘下法置廉，乘廉为方，除实讫，复以上商乘下法入廉，乘廉入方，又乘下法入廉，其方一、廉二、下三、退，再于第一位商数之次，复商第二位得数，以乘下法入廉，乘廉入方，命上商除实讫，复以次商乘下法入廉，乘廉入方，又乘下法入廉，其方一、廉二、下三、退，如前上商第三位得数，乘下法入廉，乘廉入方，命上商除实适尽[2]。

增乘开方术比诸立成开方法更具机械性，在减根变换中，通过以前商“乘下入上”的迭代演算程序，获得立成表中的对应系数。

刘益的《议古根源》和贾宪的《黄帝九章算法细草》均已失传，《议古根源》的部分内容为南宋杨辉的《田亩比类乘除捷法》(1275)所引，《黄帝九章算法细草》中的开方法与开方作法本源图为杨辉的《详解九章算法》所收。

南宋时期，秦九韶的《数书九章》(1247)在贾宪、刘益的基础上，对增乘开方法作了系统性的总结，处理任意有理系数的高次方程，其开方法名曰“正负开方术”。在秦九韶之前，方程中被开方数——“实”都是正数，开方式相当于常数项在方程右端。秦九韶规定“实常为负”，即相当于方程中常数项与未知数系数放在一端，这样正负相消，可以把增乘开方的随乘随加进行到底。开方式中的其他项系数不再有任何限制，可正可负，也可以是整数，也可以是小数。开方过程中，常数项一般越来越大，最后变成或接近于零。但有时会由负变正，他称之为“换骨”，而将全部开方过程称为“开翻法某乘方”；有时常数项符号不变，但绝对值增大，他称之为“投胎”。如卷五“尖田

---

〔1〕 杨辉. 详解九章算法纂类[M]. 丛书集成本. 北京：商务印书馆，1936：37.
〔2〕 杨辉. 详解九章算法纂类[M]. 丛书集成本. 北京：商务印书馆，1936：37.

求积"题的"开翻法三乘方",该题需解方程

$$-x^4+763\ 200x^2-40\ 642\ 560\ 000=0$$

其开方过程如下：

术　　文	算　　式
① 开玲珑三乘方。	商 40642560000 实 0 方 763200 上廉 下廉 −1 益隅
② 上廉超一位，益隅超三位，商数进一位。上廉再超一位，益隅再超三位，商数再进一位，上商八百为定。	800 商 −40642560000 实 0 方 763200 上廉 0 下廉 −1 益隅
③ 以商生隅，入益下廉，以商生下廉，廉，入方，以商生方，得正积，乃与实相消。以负实消正积，其积乃有余，为正实，谓之"换骨"。	800 商 38205440000 实 98560000 方 123200 上廉 −800 下廉 −1 益隅
④ 一变：以商生隅，入下廉。以商生下廉，入上廉内，相消。以正负上廉相消。以商生上廉，入方内，相消。以正负方相消。	800 商 38205440000 实 826880000 方 1156800 上廉 −1600 下廉 −1 益隅
⑤ 二变：以商生隅，入下廉；以商生下廉，入上廉。	800 商 38205440000 实 −826880000 方 3076800 上廉 −8400 下廉 −1 益隅
⑥ 三变：以商生隅，入下廉。	800 商 38205440000 实 −826880000 方 −3076800 上廉 −3200 下廉 −1 益隅
⑦ 四变：方一退，上廉二退，下廉三退，隅四退。商续置。	800 商 38205440000 实 −826880000 方 −3076800 上廉 −3200 下廉 −1 益隅

（续　表）

术　文	算　式
⑧ 以方约实，续商置四十，生隅入下廉内。以商生下廉，入上廉内。以商生上廉，入方内。以续商四十命方法，除实，适尽。	840 商 00000000000 实 −955136000 方 −3206400 上廉 −3240 下廉 −1 益隅
所得商数八百四十步，为田积。	

对于方程 $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-3}x^{n-3} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$，秦九韶增乘开方术的算法程序如下：

$$a_n = S_0$$
$$q_1 S_0 + a_{n-1} = S_1$$
$$q_1 S_1 + a_{n-2} = S_2$$
$$\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots$$
$$q_1 S_k + a_{n-k-1} = S_{k+1}$$
$$\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots$$
$$q_1 S_{n-1} + a_0 = S_n$$

若 $S_n = 0$，则程序停止，若 $S_n \neq 0$，则

$$a_n = S_0$$
$$q_1 S_0 + a_{n-1} = S_1$$
$$q_1 S_1 + a_{n-2} = S_2$$
$$\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots$$
$$q_1 S_k + a_{n-k-1} = S_{k+1},$$
$$\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots$$
$$q_1 S_{n-2} + a_1 = S_n$$

求多项式在 $x = x_0$ 时的值时，按照从内到外的顺序，依次计算一次多项式当 $x = x_0$ 的值。

秦九韶还给出求多项式方程的有理根和无理根的方法，包括 3 种情形：

① “连枝同体术”：在 $a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ 中，若首项系数 a_2 是非平方

数，则通过 $x=\frac{y}{a_2}$ 的代换，将首项系数变成1以求解。

② 命分法：求出根的整数部分，进行减根变换后，秦九韶以减根方程的方、廉，隅各数的和为分母，余实为分子的分数表示根的非整数部分。即对于方程 $f(x)=0$，给出下列近似法：

$$x=q+\frac{-f(q)}{f'(q)+\frac{1}{2!}f''(q)+\frac{1}{3!}f^{(3)}(q)+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(q)}$$

求其实数根的近似值。

③ 继续开方求根，并以十进小数表示。

这些方法是《九章算术》开方命分法以及刘徽注中以十进分数逼近实数思想的进一步发展。

金元时期李冶、朱世杰的著作着重介绍列方程的天元术与四元术，对开方术未作专门叙述，但书中一些算题也叙及开方。李冶处理的方程的未知数系数和常数项都可正可负，没有“实常为负”的限制，他在使用增乘开方法时，也考虑了常数项变号和绝对值增大的情况，对于 $|a_2|\neq 1$ 的一般二次方程的有理根时，李冶进行代换 $x=\frac{y}{a_2}$ 求解。朱世杰把这种方法推广到求三次、四次方程的有理数正根。

尽管天元术、四元术在明代失传，增乘开方法也不曾详细记载于明代算书，但立成开方法却散见于明代算书。如吴敬的《九章算法比类大全》记载立成释锁法曰：

> 置积为实，别置一算，名曰下法，自末位常超五位，约实，商置第一位，下法亦置上商，四遍乘为隅法，与上商除实，余实。乃六乘隅法，为方法。下法再置上商，列为四位，第一位三遍乘上商乘，又以十五乘之为上廉；第二位二遍乘上商乘，又以二十乘之为二廉；第三位以上商乘，又以十五乘之，为三廉；第四位以六乘为下廉。乃方法一退，上廉再退，二廉三退，三廉四退，下廉五退，下法六退，续商置第二位，以方、廉五法商余实，下法亦置上商，四遍乘为隅法，又以上商一遍乘上廉，二遍乘二廉，三遍乘三廉，四遍乘下廉，以方、廉、隅六法皆与上商，除实，仍余实。

乃二乘上廉、三乘二廉、四乘三廉、五乘下廉、六乘隅法，皆并入方法。又于下法皆副置上商，进五位，列为四位：第一位三遍乘上商乘，又以十五乘之为上廉；第二位二遍乘上商乘，又以二十乘之，为二廉；第三位以上商乘，又以十五乘之，为三廉；第四位以六乘为下廉，乃方法一退，上廉再退……〔1〕

王文素的《古今算学宝鉴》、程大位的《算法统宗》等书中也都有类似记载。

以开平方、开立方、带从开平、带从开立为纲目的二次、三次方程求解方法，一直是中国传统数学中的重要内容，杨辉称之为算学中的"大节目"。

2.2　关孝和的开方术及其与中算家开方术之比较

在中国汉唐数学文化传统的影响下，东亚各国接受并继承了中国传统算学知识体系和数学方法，开方术也是朝鲜和日本传统数学著作中的核心内容和基本方法。随"算经十书"在唐代传播于日本，开方术自然也会传到日本，至于宋元时期的"开方作法本源图"以及立成开方术和增乘开方术是否由宋元数学著作传播于日本，到目前为止尚未发现有明确记录的文献。但至少明代吴敬的《九章算法比类大全》和程大位的《算法统宗》都传入了日本，前者载有"开方作法本源图"以及立成开立方术，后者也含"开方作法本源图"与立成开方术，它们会随这些算书而传播于日本。此外，杨辉的著作和朱世杰的《算学启蒙》也曾传播于日本，这些中算书是和算家接受开方术的直接来源，特别是《算学启蒙》对和算代数学发展影响甚巨。

在和算家泽口一之的《古今算法记》(1670)(如图2.1)之前，和算书中的开方问题都是处理二次方程和三次方程，江户初期的和算书中，几乎都有开平方、开立方、带从开平、带从开立的内容。由于《古今算法记》深受《算学启蒙》的影响，首次使用天元术列方程，所以导致大量的高次方程出现，关孝和的《发微算法》(1674)(如图2.2)正是由于使用天元术解答《古今算法记》后附的15个遗题(书后向读者征解的数学问题)，才需要求解大量的高次方程(该书获得

〔1〕 吴敬. 九章算法比类大全[A]. 见：郭书春主编. 中国科学技术典籍通汇·数学卷[Z]. 第2册. 郑州：河南教育出版社，1993：293.

的 15 个方程的次数,依次是 6 次,9 次,27 次,108 次,9 次,18 次,36 次,18 次,6 次,10 次,10 次,54 次,72 次,1 458 次,16 次),但关孝和的《发微算法》旨在说明这些方程是如何获得的,并没有记录其求解的开方算法。



图 2.1 泽口一之的《古今算法记》(1670)



图 2.2 关孝和的《发微算法》(1674)

和算中的增乘开方法最早详于关孝和的《开方算式》(年代不详)(如图 2.3),随后他的《解隐题之法》(1685)、《开方翻变之法》(1685)、《括要算法》(1712)等书中都有详细记载。

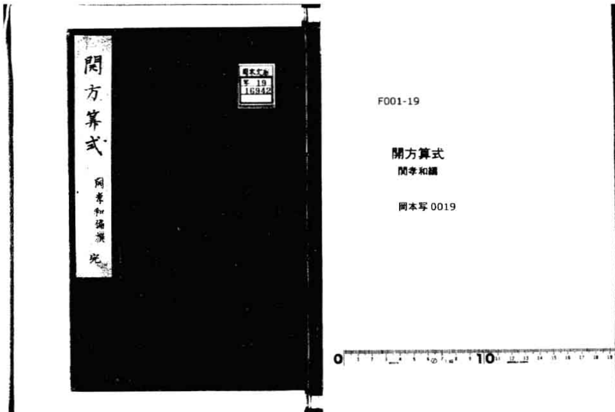


图 2.3 関孝和的《開方算式》

详细考察和比较中日数学家在使用增乘开方法过程中的各个细节,是解释中日方程论不同成就的成因与差异之关键所在。为清楚说明问题,我们首先引入有关增乘开方法的以下几个代数学定理(证明从略),并申明,文中使用的导数符号只是形式上的等同,绝不意味和算与中算中出现了导数概念。

定理 2.1 对于方程 $f_0(x)=\sum_{k=0}^{n}a_{k,0}x^k=0$, (2.1)

若存在实数系列：q_i　$(i=1, 2, 3, \cdots, t)$，满足条件：

① $f_i(x)=\sum_{k=0}^{n} a_{k,i}x^k=0\ (i=0, 1, 2, \cdots, t-1)$；

② $a_{k,i}=f_{i-1}^{(k)}(q_i)/k!\ (i=1, 2, 3, \cdots, t)$；

③ $a_{0,t}=f_{t-1}(q_t)=0$。

则 $\sum_{i=1}^{t} q_i=q$ 是方程(2.1)的根，即 $f_0(q)=0$ ($f_{i-1}^{(k)}(q_i)$ 表示函数 $f_{i-1}(x)$在q_i点的k 阶导数)。

定理 2.2　若上述①，②，③条件成立，则 $a_{k,t}=f_{t-1}^{(k)}(q_t)/k!=f_0^{(k)}(q)/k!$，即 $a_{k,t}=f_{t-1}^{(k)}(q_t)/k!$ 由 q 唯一确定而与q_i无关。

定理 2.3　记满足上述①，②，③条件的 $a_{k,t-1}=b_{k,0}$且 $\sum_{i=1}^{t} q_i=q=x_1$，若 $g_0(x)=\sum_{k=1}^{n} b_{k,0}x^{k-1}=0$ 存在实根 p_1，则 $x_2=x_1+p_1$ 是原方程(2.1)的另一根。并称 $g_0(x)=0$ 为方程(2.1)的降一阶方程，$g_0(x)=0$ 的降一阶方程则称作方程(2.1)的降二阶方程。

定理 2.4　实数 q 是方程(2.1)的 $r+1$ 重根的充要条件是：降一阶方程 $g_0(x)=\sum_{k=1}^{n} a_{k,t-1}x^{k-1}=0$ 的系数 $a_{k,t-1}=f_{t-1}^{(k)}(q_t)/k!$中，$k\leqslant r$ 时全为 0。

现将中日增乘开方法程序对列如下：

贾宪的开方法	关孝和的开方法	李锐的开方法
实上商置第一位得数，以上商乘下法置廉，乘廉为方，除实讫，复以上商乘下法入廉，乘廉入方，又乘下法入廉，其方一、廉二、下三、退，再于第一位商数之次，复商第二位得数，以乘下法入廉，乘廉入方，命上商除实讫，复以次商乘下法入廉，乘廉入方，又乘下法入廉，其方一、廉二、下三、退，如前上商第三位得数，乘下法入廉，乘廉入方，命上商除实适尽[1]。	先立商一，自隅命之，到实异减同加，而实余者，复立商一，如前到实，逐如此而实尽，则所立商相并为定商[2]。	以商乘隅加减廉，又以商乘之加减方，又以商乘之加减实，为次商实，乃变之，以商乘隅加减廉，又以商乘之加减方，又以商乘之加减实，为次商方法，是为一变；以商乘隅加减廉，为次商廉，是为二变；变讫，方退一位、廉退二位、隅退三位，约商如前，尽乃止[3]。

〔1〕 杨辉. 详解九章算法纂类[M]. 丛书集成本. 北京：商务印书馆，1936：37.

〔2〕 関孝和. 解隠題之法[A]. 平山諦，下平和夫，広瀬秀雄編. 関孝和全集[Z]. 大阪：大阪教育図書，1974：137.

〔3〕 李锐. 开方说[A]. 郭书春主编. 中国科学技术典籍通汇・数学卷[Z](五). 郑州：河南教育出版社，1993：5－10.

以上三家的增乘开方法基本上是按定理 2.1 进行的。由定理 2.1 可知，增乘开方法对于各次商 q_i 为任意实数都适用，不论 q_i 为何实数，只要存在 q_t 使 $a_{0,\,t-1} = f_{t-1}(q_t) = 0$（即第 t 次余实为 0），则达到开出商的目的。

开方中试商最为困难，中算开方程序总包括初商前的“借一算，步之，超×等”以及“除实”后的“方法一退，一廉二退，二廉三退，……”的“步”与“退”步骤，其代数意义在于确定初商 q_1 与次商 q_2 的数字位值，即确定 $q_i = \bar{q}_i \times 10^k$（$\bar{q}_i$ 是 $0 \sim 9$ 的数字）中的 k。

与中算开方术程序相比，关孝和开方程序中特别之处在于扬弃了“步”与“退”的步骤。为此他设计了两种“课商”[1]办法（见于《开方算式》(如图 2.3))：

> 凡量最初之商者，有难考得适数于一般，故或先起于一个数，或属题数而窥其位。皆立商数，从下命而除之，实余则商不及，故逐增其数[乃多少不定，任意而增之][2]开之，若误而商太过，则诸级反覆，而难得同名之后商，故立异名之商[是又随时斟酌其数也]开之[3]。

这段术文意义如下：

① “或先起于一个数”，即任立一个初商。初商的任意性，必然导致两种后果，一是“实余则商不及”；二是“误而商太过，则诸级反覆”。对于前一情形则采取“逐增其数”的办法，而且“增数”仍具有任意性。

② “或属题数而窥其位”。属，通瞩，“属题数”即视开方式各级系数的数值，“窥其位”即窥察商之数位。这实际上也就是中算开方程序中的定商方法。

和算开方法的这种细微变化，反映出和算开方演算已经摆脱了中算开方法的算术属性，处理的方程系数与方程根具有一般性的代数意义，与定理 2.1 是完全等同的。这种代数化转变决定了和算必然在方程论方面的成就，下文将作具体分析。

关于和算增乘开方法的来源，日本学者认为是关孝和在《杨辉算法》的启发下独自发现的[4][5]。持这种观点基于以下史实：1661 年关孝和抄写

---

〔1〕 课商为和算术语，即试商。
〔2〕 [ ]内的文字为原文中的双行夹注，下同。
〔3〕 関孝和. 開方算式[A]. 平山諦，下平和夫，広瀬秀雄編. 関孝和全集[Z]. 大阪：大阪教育図書，1974：259.
〔4〕 平山諦. 関孝和[M]. 東京：恒星社厚生閣，1981：2.
〔5〕 日本学士院. 明治前日本数学史[M]. 第二卷. 東京：岩波書店，1955：1954.

了《杨辉算法》，其底本是高丽复洪武戊午年刊本，其书包括《乘除通变本末》、《田亩比类乘除捷法》及《续古摘奇算法》；但载有贾宪增乘开方法与开方作法本源图的《详解九章算法》以及秦九韶的《数书九章》是否传入日本，至今尚未发现可考的史料记录。此外，中算史学界普遍认为，增乘开方法出现之后，立成释锁方法就被扬弃了[1]。对于以上这些观点，笔者认为似有商讨的余地。

首先，我们来考察一下《杨辉算法》中对开方法（方程为 $x^2-12x+864=0$）的记叙：

> 依五级（资次）[2]次第布置商、积、方法、负从、隅算，置积为实，于实上商置长三十，以乘隅算，三十于实数之下，名曰方法，以负从十二减三十，余十八，命上商除实五百四十，余积三百二十四，复以上商三十乘隅得三十，并入方法，共四十八，退位为廉，其隅算再退，又于实上商置长六步，以乘隅算得六，并入廉法共五十四，命上商除实尽，得长三十六步合问[3]。

杨辉这段"草"文，仅针对二次带从开方，没有透露出暗示可能从低次方程发展到高次方程的任何蛛丝马迹。"上商乘隅入方法"的步骤可能诱发对"倍法"的改进，而真正的困难却在于如何获得高次方程求解过程中的各廉系数。

我们知道，立成释锁与增乘开方是互为表里的两种方法，立成表中的各数是增乘结果的数表化，或者说，开方作法本源图可由增乘开方法生成，这一点，杨辉与吴敬在他们的著作中说得非常清楚，如吴敬《九章算法比类大全》（图 2.4）载曰：

> 增乘方求廉法草曰：[释锁求廉本源]列所开方数[五乘方列五位，隅算位外]以隅算一自下增入上位，至首位而止[首位得六，第二位得五，第三位得四，第四位得三，下一位得二]，复以隅算如前升增，递低一位求之。

---

[1] 钱宝琮. 中国数学史[M]. 北京：科学出版社，1992：254.

[2] 杨辉《田亩比类乘除捷法》作"依资次"，"资次"应为"五级"之误。

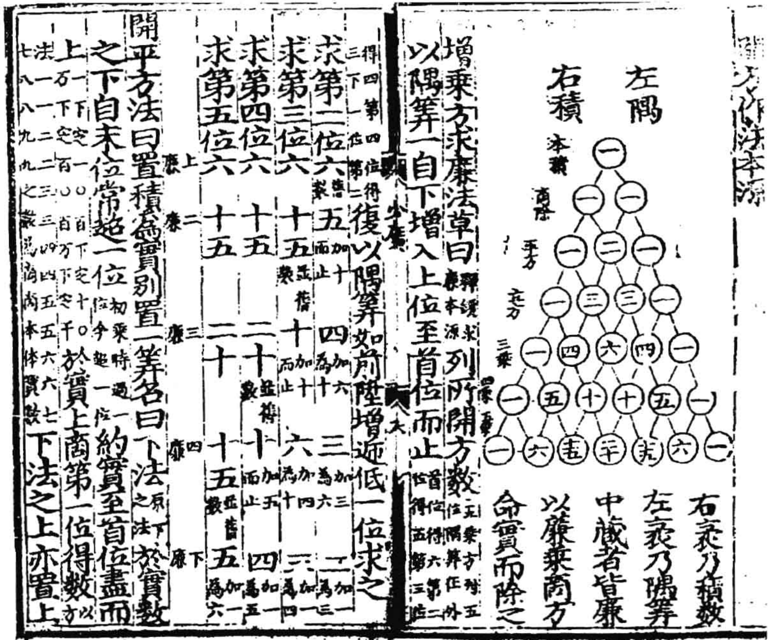
[3] 杨辉. 杨辉算法・田亩比类乘除捷法[A]. 郭书春主编. 中国科学技术典籍通汇・数学卷[Z]（一）. 郑州：河南教育出版社，1993：1087.

求第二位六[旧数]　五[加十而止]　四[加六为十]　三[加三为六]　二[加一为三]

求第三位六　十五[并旧数]　十[加十而止]　六[加四为十]　三[加一为四]

求第四位六　十五　二十[并旧数]　十[加五而止]　四[加一为五]

求第五位六　十五　二十　十五[并旧数]　五[加一为六][1]


左隅　右積

右袤乃積數
左袤乃隅筭
中藏者皆廉
以廉乘商方
命實而除之

增乘方求廉法草曰列所開方數
以隅筭一自下增入上位至首位而止
復以隅筭如前陞增遞低一位求之

求第二位六　五　四　三　二
求第三位六　十五　十　六　三
求第四位六　十五　二十　十　四
求第五位六　十五　二十　十五　五

開平方法曰置積爲實別置一筭名曰下法於實數之下自末位常超一位約實至首位盡而上商第一位得數下法之上亦置上

图 2.4　吴敬的《九章算法比类大全》

分析这段文字可知，吴敬是在利用增乘开方法获得立成表。事实上，《九章算术》开方术的"倍法为定法"程式也可视为立成方法，而且这种开方形式一直延续至明代，可以说立成法是中算家习惯使用的。其实，立成方法也不只限于对 $x^n-a=0$ 型方程的开方，对于 $x^n-a=0$，开出初商 q_1 后，求次商 q_2 便是对

$$(a-q_1^n)+C_n^1q_1^{n-1}x+C_n^2q_1^{n-2}x^2+\cdots+C_n^{n-1}q_1x^{n-1}+C_n^nx^n=0$$

的带从开方。中算家在发明开方术的同时，就蕴涵着带从开方术的形成。

[1] 吴敬. 九章算法比类大全[A]. 郭书春主编. 中国科学技术典籍通汇·数学卷[Z](二). 郑州：河南教育出版社，1993：167.

换言之，开方术向带从开方术发展，对中算家来说，不存在什么困难，而困难在于如何确定开高次方程时“倍法”所需要的系数 C_n^k。宋代发达的代数演算（特别是天元术的应用）导致高次方程的大量出现，探究高次方程开方各廉系数，必然是宋代数学家所面临而亟待解决的课题。他们可能在构造立成表的过程中发现了增乘开方法，从而宋代两法并存。按中算开方传统，对一般数学家而言，贾宪的立成表是必不可少的开方工具，而对获得此表的增乘方法未必都那么关心，这也可能是增乘方法于宋元后逐渐失传的主要原因之一。

钱宝琮认为，在吴敬、周述学、程大位的著作中保存着开方作法本源图，而没有四次以上高次幂的开方法[1]，其言意味着立成表的作用在明代已名存实亡。笔者认为，这并不符合历史实际。在吴敬的《九章算法比类大全》卷十“各色开方”中，尚有“开五乘方”与“带益从廉添积开三乘方”[2]，使用的正是立成方法。程大位在开方作法本源图后附言道：“（三乘方以上）其形不知如何模样，只是取数而已，或只至十乘，三十余乘方皆是，先贤取生率之妙，以明开方正率，亦不可废。”说明他也知道立成表可用于一般高次方程的开方，因受实用性算题的限制而未出现其算例。程大位以组合方式生成立成表，说明增乘方法到程大位时已完全失传。

以上分析表明，立成方法与增乘方法具有密切联系，根据立成表可以重新发现增乘开方法。杨辉的《详解九章算法》是否传入日本，未见史籍明载，我们不必断言，但吴敬的《九章算法比类大全》流入过日本（现藏于静嘉堂[3]）。

另一方面，关孝和增乘开方法虽详于《解见题之法》（约 1685）与《括要算法》（1709），但关孝和早期著作中就已出现高次方程开方问题。如《阙疑抄一百问答术》（约 1667 年前后）中方程次数最高达 18 次；《勿惮改答术》（约

---

〔1〕 钱宝琮. 中国数学史[M]. 北京：科学出版社，1992：254.

〔2〕 吴敬. 九章算法比类大全[A]. 卷十. 靖玉树编. 中国历代算学集成[Z]（中）. 济南：山东人民出版社，1994：2024.

〔3〕 静嘉堂文库是日本东京收藏日文古籍的专门图书馆，创始人岩崎弥之助从明治二十五年（1892）前后开始搜集中国和日本的古籍，其子岩崎小弥太扩充了藏书。中国清末藏书家陆心源的皕宋楼所藏宋元版刻本和名人手抄本 4 146 部 43 218 册于 1907 年为岩崎所购，成为静嘉堂文库的基本藏书。1948～1970 年间该文库成为日本国立国会图书馆的分馆，后复改为独立机构。

1667～1674年间)中方程次数最高达9次;《发微算法》(1674)中处理的都是高次方程,15个方程的次数最高达1 458次。

这些著作仅给出方程式的推演过程而未载开方求解的演算,不清楚当时关孝和是如何开方的,但似乎可以肯定,关孝和青年时代就已掌握了高次的开方法,或许就是增乘开方法。因此,有理由认为关孝和可能通过吴敬或其他中算书中的立成表而发现了增乘开方法,当然也有可能此法在朝鲜与日本并未失传。

2.3　中日方程论的成就

开方法在日本江户时代和中国清代中期都出现过复兴,中日数学家获得了一系列关于方程理论的新成果。本节内容将比较近世中日方程论的成就。

2.3.1　对负根与多根的认识

对负根与多根的认识是解方程问题从算术化向代数化转变中极为重要的一步,无论东方还是西方,都未能轻易逾越这一步。在西方,1484年法国人许凯(Nicolas Chuquet, 1450? ～1500)的著作初见其萌芽,至1545年意大利人卡尔丹(Jerome Cardan, 1501～1576)才开始详论其说,此后西方代数方程理论有了迅速发展。开方虽是中算之"大节目",在求高次方程数值解方面之成就远高于西方,但中算家一直并不关心根的性质及根与系数的关系。

和算著作中最早讨论两根问题的是泽口一之的《古今算法记》(1671),称之"翻狂",以作为"病题"进行修正而只取其中一个正根[1],说明此时和算家尚未形成多根意识。《古今算法记》问题只是孤立现象,还不足以刺激关孝和对多根、负根的研究。促使和算突破中算仅求方程一个正根传统的真正原因,还必须围绕和算开方法的算法特征去寻找。

---

〔1〕 三上義夫. 関孝和の業績と京阪の算家並に支那の算法との関係及び比較[J]. 東洋学報, 1933(21): 369.

在中算开方模式中，商必然存在下述特征：

① 若 $q_i = \bar{q}_i \times 10^k$，则 $q_{i+1} = \bar{q}_{i+1} \times 10^{k-1}$

② $\bar{q}_1 \times 10^k \leqslant q = \sum_{i=1}^{t} q_i < (\bar{q}_1 + 1) \times 10^k$

③ 方程根近似值序列：$e_k = \sum_{i=1}^{k} q_i \leqslant q \quad (k = 1, 2, 3, \cdots, t)$

实用数学背景下求正解是自然而首要的，因此开方时试商总是首先考虑初商 $q_1 > 0$，从而有 $0 < q_1 \leqslant e_k \leqslant q$，即 e_k 总是在区间 $(0, q)$ 上单方向逼近商 q（如图2.5(a)）。另一方面，“借一算，步之”的定初商办法也限定了 q_1 的范围。这一数理特征决定了中算增乘开方内部不会出现负根及多根方面的矛盾，或者说，中算家不能认识负根与多根已为其开方模式所定格。这种定势延续到清代方程论复兴时仍未能改变，李锐（1769～1817）增乘开方仍遵循传统，没有突破数值位置的束缚。

清代学者对方程根非唯一性的认识是与开方法无涉的。言古人所未言的汪莱（1768～1813）研究方程论时，宋元时期增乘开方法尚未被发掘。《数理精蕴》（1723）下编卷三十三“论带从平方术”言二次方程 $x^2 - px + q = 0$ 常有两正根，对汪莱有直接影响[1]，而三角学中解斜三角形的多解不确定性也是汪莱多根认识的又一刺激源，这在其《衡斋算学》（1796～1805）第一册第六节中有所反映[2]。

关于负根的认识，是汪莱在认识多根之后，研究多项式因式分解与高次方程根的存在性关系时才开始出现这种意识的萌芽，至李锐《开方说》结合开方法的试商而正式提出。

关孝和开方术开门见山地称“立正负商”与“立异名商”，建部贤弘也说“其商本有正有负”[3]，说明和算家在开方演算时已对负根不加区别地接受。那么，自然存在这样的疑问：究竟是关孝和认识了存在负根与多根之后对传统的数字开方加以代数化改进，还是相反地，在对传统开方法进行代数化改进过程中形成了多根与负根的认识？要想回答这一问题，必须考察和算开方法发展的历程。

---

〔1〕 钱宝琮．汪莱《衡斋算学》评述[A]．钱宝琮科学史论文选集[C]．北京：科学出版社，1983：248.

〔2〕 汪莱．衡斋算学[A]．第一册．郭书春主编．中国科学技术典籍通汇・数学卷[Z]（四）．郑州：河南教育出版社，1993：1493.

〔3〕 関孝和，建部賢明，建部賢弘編集．大成算經[M]．卷三“開方第三”．東北大学図書館狩野文庫藏抄本．登録号：ws006478，索書号：7.20820.20.

和算对增乘开方法最早记述是《解见题之法》，对于为何出现“负商”，该书亦有说明：

> 或实翻而不能尽者，立负商，如前到实，异减同加而实尽，则前商相并，内并减负商，为定商[1]。

这里有三点应该予以注意：① 已摆脱中算增乘开方中“超”与“退”的传统，各次商 q_i 具有任意性；② 在“实翻而不能尽”的情况下才立负商以解决“实不尽”的矛盾；③ 蕴涵着前述定理 2.2。

对于第②点与第③点李锐也认识到了，他说：

> 凡商数误多误少者，置余实，变之，误多则商负，减之而得所求，误少则商正，加之而得所求，或各商俱误，或次商误为初商，初商误为次商，而得实尽，并各商皆的所求[2]。

宋元时期，中算家在开方实践中遇到两类问题，一是“减根”变换后，余实绝对值增大；二是“减根”变换后，余实符号改变。前者叫“投胎”，后者叫“换骨”或“翻法”[3]。据上述文献可以看出，负根的引入完全是为了解决“投胎”问题，而刘益的正负开方术正是处理负商的保证。

另一方面，和算家废除“进退位”程序导致了定理 2.2 的结果，于是不完全商逼近实根的方式也突破中算开方的右侧单向逼近的模式，负根的出现是必然的(如图 2.5(b))。

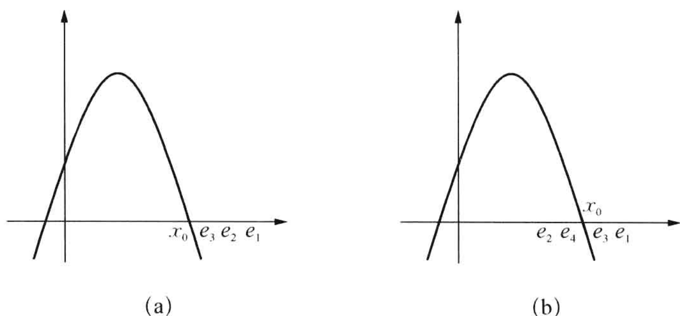


图 2.5(a) 贾宪的逼近方式　　(b) 关孝和的逼近方式

---

〔1〕 関孝和. 解見題之法[A]. 平山諦，下平和夫，広瀬秀雄編. 関孝和全集[Z]. 大阪：大阪教育図書，1974：138.

〔2〕 李锐. 开方说[A]. 郭书春主编. 中国科学技术典籍通汇・数学卷[Z](五). 郑州：河南教育出版社，1993：57.

〔3〕 和算“翻法”指方程任意项系数的变号。

《括要算法》(1712)是关孝和去世后由其弟子整理成书的,《大成算经》(1711)著作年代是1683～1711年,时间与其相当,因此,它们所述是定型成熟的开方法,绝非早期情形。从而笔者认为,和算增乘开方法的发展可能大致分为以下诸阶段:

中算的算术阶段→定理2.1的任意$q_i>0$阶段→定理2.1的立负商$q_i<0$阶段

→定理2.1的一般情形阶段→《括要算法》的总结阶段

上述分析表明,和算家开方摆脱位置上的限制导致负根、多根出现,从而促进了和算开方法的代数化。从此意义上说,中算过分强调位置有碍代数学的进一步发展而存在负面作用。

2.3.2 逐次压缩 Newton 法与等根问题

当多根存在性被认识后,必然面临如何求出所有实数根的问题,中日算家于此都有所探索,都获得了相当于定理2.3的开方法,李锐称之为"代开法",西方近代方程论称之为"逐次压缩 Newton 法"。关孝和与李锐的开方法术文列如下表。

关孝和的方法	李锐的代开法
立正负商各若干,从隅命之[平方式者,从廉命之],至实而开尽之,逐下命之,至隅上级[乃平方式者从方,立方式者从廉,三乘方式者从下廉也,余仿之]而加减之,复立正负商若干,从隅命之,至方而开尽之,逐下命之,至隅上级而加减之。次第如此,至隅上级而开尽之[若至其级而不能开尽者,为无商也],所得各商递同加异减之,得逐商[1]。	凡平方二数,以平方开一数,其一数可以除代开之;立方三数,以立方开一数,其二数可以平方代开一数,除代开一数;三乘方四数,以三乘方开一数,其三数可以立方代开一数,平方代开一数,除代开一数;其法以本乘方先开一数,副置先开数,加减[同名减,异名加]末商,名曰寄位,以其余递降一乘开之,所得加减寄位[同名加,异名减]为又一数。[2] 又一术:以本乘法先开一数,讫,变之,以递降一乘代开之,所得为较数,以较数加减[同名加,异名减]先得一数,为又一数[3]。

事实上,汪莱在《衡斋算学》第七册"求次数诀"中说过:"合诸商数于原

[1] 関孝和. 开方翻变之法[A]. 平山諦,下平和夫,広瀬秀雄編. 関孝和全集[Z]. 大阪:大阪教育図書,1974:161.

[2] 李锐. 开方说[A]. 郭书春主编. 中国科学技术典籍通汇·数学卷[Z](五). 河南教育出版社,1993:19.

[3] 李锐. 开方说[A]. 郭书春主编. 中国科学技术典籍通汇·数学卷[Z](五). 河南教育出版社,1993:22.

题内，如初商法入之，变题恒省下一层，降其位”，这里的“原题”指开方中的初始(原)方程 (2.1)，“变题”指方程(2.1)的降一阶方程 $g_0(x)=0$，所言即“代开法”。李锐《开方说》以《衡斋算学》为蓝本，因此，认为李锐是“用降幂法解高次方程的先驱”的观点应予以纠正[1]。

关孝和在“降次开方”的定理 2.3 基础上又前进一步。对于开方式(2.1)开出初商 $x_1=\alpha_1$ 后，若各降阶方程的根 $\alpha_2=\alpha_3=\cdots=\alpha_k=0$，亦即以 α_1 作减根变换时，实、方、一廉以至 $k-1$ 廉全为 0，则方程(2.1)存在 $k+1$ 重根。基于这一原理关孝和又获得了定理 2.4 的方法，即所谓的“适尽诸级法”：

> 每式以实行为前式，以所尽级行为后式，而前式一级叠之，而求换式，而交式斜乘，而求生克，而得寄消也。诸级之数者，如衰垛术求之[乃实行者基数，方行者圭垛，初廉行者三角衰垛，次廉行者再乘衰垛，三廉行者三乘衰垛也，余仿之]。

						实	
					方	1	
				初廉	1	1	归
			次廉	1	2	1	平
		三廉	1	3	3	1	立
	四廉	1	4	6	4	1	三乘
隅	1	5	10	10	5	1	四乘
1	6	15	20	15	6	1	五乘[2]

对于方程 $f_0(x)=0$，所谓“适尽某级”，就是指用增乘开方法求出一根 q 后，n 变方程 $f_1(x)=\sum_{r=1}^{n}\frac{f_0^{(r)}(q)}{r!}x^{r-1}=0$ 的 Teylor 系数 $\frac{f_0^{(r)}(q)}{r!}$ 中，从实级至 $k-1$ 廉级全为 0。这里 $\frac{f_0^{(r)}(q)}{r!}=\sum_{r=k}^{n}C_r^k a_r q^{r-k}$，　其中 C_r^k 为 $k-1$ 乘垛。等价于给出 $f_0(x)=0$ 存在 $k+1$ 重根的充要条件：

$$\begin{cases} f_0(x)=0 \\ f_1(x)=\dfrac{f_0^{(k)}(x)}{k!}=0 \end{cases} \tag{2.2}$$

〔1〕 朱家生. 李锐《开方说》研究[A]. 洪万生主编. 谈天三友[C]. 明文书局，1993：289.
〔2〕 関孝和. 開方翻変之法[A]. 平山諦，下平和夫，広瀬秀雄編. 関孝和全集[Z]. 大阪教育図書，1974：163.

事实上，和算家并无重根意识，那么关孝和构造此算法的背景是什么呢？这需从两方面分析。

首先，开方中使用 Newton 逐次压缩法会出现 n 变方程若干级为 0 的特殊情形（即有等根方程），这样便省开若干次，这种特殊化开方自然会引起和算家的兴趣而设计了这种带有技艺性质的“适尽诸级法”。

其次，在遗题承继与奉揭算额的数学知识传播氛围中，问题设计是和算家重要的数学活动，问题构造被视为衡量其算学能力的重要标准。和算家将“病题”分为五类：① 转题（条件不足，无法求解）；② 繁题（条件过多，且不相容）；③ 层题（条件迂回曲折）；④ 反题（条件违背常理）；⑤ 虚题（所得方程或无实根，或仅有负根或有正根而不合题意）。对第⑤类“虚题”的改造，刺激了和算家研究与“适尽诸级法”相联系的“替级数”与“视商极数”的数学问题。

所谓“视商极数”即为

> 置原式，依前替级数而各得式，随适尽诸级法而自其级逐下乘其级数[乃用适尽方级法，则自方逐下乘方级数，用适尽初廉级法，则自初廉逐下乘初廉级数，余仿之]，其得式，开除之，得商极数〔1〕。

对于方程 $f_0(x)=0$，若适尽于 $k-1$ 廉级，求商极数的方法分三步进行：

第一步：由适尽诸级法的式(2.2)消去 x，得

$$\varphi(a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)=0 \tag{2.3}$$

第二步：替诸级数。从(2.3)中解出 $a'_i=\varphi_i^{-1}(a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{i-1},\ a_{i+1},\ \cdots,\ a_n)$，替换 $f_0(x)=0$ 中的相应级 a_i，得到替级数方程：

$$\begin{aligned}h_i(x)&=a_0+a_1x+\cdots+a'_ix^i+a_{i+1}x^{i+1}+\cdots+a_nx^n\\&=(x-\alpha_i)^{k+1}p_i(x)=0\end{aligned} \tag{2.4}$$

这里要求式(2.3)可解，且 a'_i 与 a_i 同号；

第三步：求商极数。对替级数方程(2.4)，从第 $k-1$ 廉级开始，以上各

---

〔1〕 関孝和. 開方翻変之法[A]. 平山諦，下平和夫，広瀬秀雄編. 関孝和全集[Z]. 大阪：大阪教育図書，1974：168.

级 a_k, a_{k+1}, …, a_n,分别乘 $C_r^k(r=k, k+1, \cdots, n)$,将方程(2.4)变换为商极数方程:

$$u_i(x)=C_k^k a_k x^k+C_{k+1}^k a_{k+1} x^{k+1}+\cdots+ C_i^k a_i' x^i+\cdots+C_n^k a_n x^n=0 \quad (2.5)$$

则方程(2.5)的正根便是商极数。

由适尽诸级法原理,替级数变换保证了替级数方程(2.4)具有 $k+1$ 重根,即 $h_i(x)=(x-\alpha_i)^{k+1} p_i(x)=0$,正数 α_i 便是商极数。为求 α_i,必须对方程(2.4)开 n 次方,根据多项式性质知:方程(2.4)的 $k+1$ 重根必是其 k 阶导函数的一个单根,而上述第三步变换正是保证式(2.5)是式(2.4)的 k 阶导函数。通过求解式(2.5)而获得商极数 α_i。

以上分析揭示了适尽诸级法与"视商极数"关系的数学实质与数学背景,可以看出适尽诸级法是视商极数算法的子算法,视商极数目的在于寻找方程某一正根存在的临界点;并且在视商极数算法中,$f_0(x)=h_i(x)+b_i x^i=(x-\alpha_i)^{k+1} p_i(x)+b_i x^i=0$,在 $i=0$ 时(替实数,适尽方级),商极数 α_i 是 $f_0(x)=0$ 的驻点,这又是和算方程论与多项式极值理论的一种联系。

李锐在讨论方程等根问题时也称:"凡可开二数以上而各数俱等者,非无数也,以代开法入之可知"[1],可惜在等根问题上没有作进一步的讨论。

2.3.3 关于根的存在性判定

实根的存在性是方程论重要内容之一。在比较中日方程论此方面成就前,先来看看与此相关的方程分类法。

关孝和将多项式方程分为 4 类,即

① 全商式:只有一个实根(包括重根)的方程;

② 变商式:只有多个同号根的方程;

③ 交商式:存在异号根的方程;

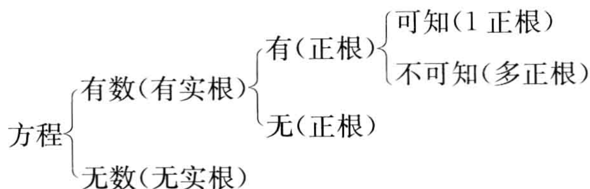
④ 无商式:无实根的方程。

建部贤弘在《大成算经》中将"变商式"与"交商式"并为"变商式"一类。

〔1〕 李锐. 开方说[A]. 郭书春主编. 中国科学技术典籍通汇·数学卷[Z](五). 郑州:河南教育出版社,1993:5-55.

和算方程分类方式应当是以“降次开方”为基础的。

汪莱未明确给出方程分类，据其所论可以看出其以正根为中心的如下分类原则[1]：



这种分类可能是通过归纳方式获得的，未必与开方过程有关。

关于根的存在性判定，和算家称之为“验商有无”，初见于关孝和的《开方翻变之法》，其法曰：

> 假立正负商一算，从其式之隅命之[平方式者，从廉命之]，至实级而布之。原式之实与所布之实同名者，其商无之；异名者，其商有之。
>
> 若虽实同名，他级中有异名者，以适尽其级法而替原式各级数，而后为其商有之也[乃有异名级多，则以上级为主][2]。

对于第一句话，藤原松三郎[3](Fujiwara Matsusaburo，1881～1946)与平山谛[4](Hirayama Akira，1904～1998)理解为：若 $a_n>0$ 且 $a_0<0$ 时有正根；若 $a_n>0$ 且 $a_0>0$ 时无正根，并以 $x^2-3x+2=0$ 为例，说明这种判定前者正确，后者不正确，即：若立正商 $q>0$，所布三级：隅 1、方 q、实 q^2 均为正，所布之实与原实 2 同号，按关孝和的判定应当无商，而事实上此方程有两正商，故关孝和第一句话的判定法是错误的。

藤原、平山的上述理解，实际是将第一句话与第二句话割裂开来理解的，从而曲解了关孝和的本意。如果将这两句联系起来，就会发现关孝和第一句话的判定是科学的。

首先应当明白，关孝和的第二句话是针对所布之实与原实同号这一情形而设计的，而此又存在两类情况：① 所布式各级均与原式对应级同号；② 所布实与原实同号，但存在所布式某级与原式对应级异号。对于第②类

---

〔1〕 李兆华. 汪莱方程论研究[A]. 洪万生主编. 谈天三友[C]. 台北：明文书局，1993：217.

〔2〕 関孝和. 開方翻変之法[A]. 平山諦，下平和夫，広瀬秀雄編. 関孝和全集[Z]. 大阪：大阪教育図書，1974：161.

〔3〕 学士院. 明治前日本数学史[M]. 第二卷. 東京：岩波書店，1954：212.

〔4〕 平山諦. 関孝和[M]. 東京：恒星社厚生閣，1981：94.

情况，是按第二句话判定的，如果第一句话的判定包括第②类情况，那么第一句话与第二句话就不相容而出现抵牾。因此，第一句话应不包括第②类情况，关孝和的本意应是：原式之实与所布之实同名，且他级皆同名者，其商无之；异名者，其商有之。造成上述曲解是由于书中文字过于简略而表述不清。

按照这种理解，关孝和的两句话可以分解成下面3条判定法则：

(A) 当 $a_0a_nq^n<0$ 时，则根存在；

(B_1) 当 $a_0a_nq^n>0$ 时，若 $a_na_kq^{n-k}>0$ $(k=1, 2, 3, \cdots, n-1)$，则根不存在；

(B_2) 当 $a_0a_nq^n>0$ 时，若存在某个 a_k 使 $a_na_kq^{n-k}<0$（若存在多个这样的 a_k，则取下标 k 最小者），则按根的判别式进行判定，即：

> 依验商有无法，视有异名级，而立天元一为所替各级数，随适尽其级法，得式，开除之，得商[若变商者，实数隅数以最多商为所替数，他级数以最少商为所替数；交商者，随原级而开出同名商；无商者，不能替数也]。仍得商与原级数，异名者不用之；同名者，实数隅数[乃平方式者，实数廉数也]从得商以下者，原商有之，以上者，原商无之，他级数从得商以下者，原商无之，以上者，原商有之也〔1〕。

由 $\begin{cases} f_0(x)=0 \\ \dfrac{f_0^{(k)}(x)}{k!}=0 \end{cases}$ 消去 x，得 $\phi(a_0, a_1, \cdots, a_n)=0$，于此分别解出

$$\begin{cases} a_0=\phi_0^{-1}(a_1, a_2, \cdots, a_n) \\ a_1=\phi_1^{-1}(a_0, a_2, \cdots, a_n) \\ \qquad \cdots\quad\cdots \\ a_n=\phi_n^{-1}(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}) \end{cases}$$

一般情况下，$\phi(a_0, a_1, \cdots, a_n)=0$ 为非线性函数，因此解出的 ϕ_k^{-1} 不唯一，故取 $\max\{|\phi_k^{-1}|\}=\Delta_k$ $(k=0, n)$，$\min\{|\phi_k^{-1}|\}=\Delta_k$ $(k=1, 2, 3, \cdots, n-1)$ 为方程(2.1)之根的判别式。对于实级或隅级，即 $k=0, n$ 时，

〔1〕 関孝和. 開方翻変之法[A]. 平山諦，下平和夫，広瀬秀雄編. 関孝和全集[Z]. 大阪：大阪教育図書，1974：166.

若 $|a_k| > \Delta_k$，则无根；若 $|a_k| < \Delta_k$，则有根；

对于其他各级，即 $k \neq 0$, n 时，若 $|a_k| > \Delta_k$，则有根；若 $|a_k| < \Delta_k$，则无根。

法则(A)可以表述为等价的两个命题：

① n 为奇数时，若 $a_0 a_n < 0$，则有正根；若 $a_0 a_n > 0$，则有负根；

② n 为偶数时，若 $a_0 a_n < 0$，则既有正根又有负根。

相当于代数学中的两条判定定理：

定理 2.5　任意实系数奇次方程至少有一个实根。

定理 2.6　任意实系数偶次方程，若 $a_0 a_n < 0$，则至少有两个实根(一正一负)。

法则(B_1)也可表述为等价的两个命题：a_0, a_1, …, a_n 全同号的方程无正根；a_0, a_1, …, a_n 正负相间的方程无负根。根据 Descartes 符号法则，显然成立。

因此，关孝和的法则(A)与(B_1)都是正确的。对于第三条法则(B_2)不难验证，对于三次以上的方程并不成立。

清代学者对根的存在性判定是围绕正根存在性而展开的。汪莱罗列九十六条二、三次方程，分为 52 条“可知”；36 条“不可知”；8 条“可知”或“不可知”，缺乏一般性。李锐[1]将其归纳为 3 条一般性法则：

(L_1) 凡隅实异名，正在上，负在下，或负在上，正在下，中间正负不相间者可知；

(L_2) 凡隅实异名，中间正负相间，开方时其与隅异名之，从廉皆翻而与隅同名者，可知，不(否)则不可知；

(L_3) 凡隅实同名者不可知。

李锐的法则(L_1)，(L_2)属于关孝和法则(A)前半部分的正根情形，法则(L_3)为关孝和法则(B_1)、(B_2)所涵盖。(L_1)，(L_3)相当于 Cardano 符号法则[2]，而(L_2)是错误的。

李锐后来在《开方说》中又对上述判定法作如下补充：

[1] 李锐. 衡斋算学[A]. 第五册跋. 郭书春主编. 中国科学技术典籍通汇·数学卷[Z](四). 郑州：河南教育出版社，1993：4-1531.

[2] 刘钝. 李锐与笛卡尔符号法则[J]. 自然科学史研究，1989，8(2)：127.

(l_1) 凡上负下正,可开一数;

(l_2) 上负、中正、下负,可开二数;

(l_3) 上负、次正、次负、下正,可开三数或一数;

(l_4) 上负、次正、次负、(次)正、下负,可开四数或二数。

利用方程系数变号顺序(项数)来进行判定,与 Descartes 符号法则是等价的[1]。但李锐并没有认识到偶次变号情形的非充分性。

清代学者也尝试构造根的判别式,汪莱给出下列特殊类型方程:

(Ⅰ) $x^n - px^m + q = 0\ (m,\ n \in \mathbf{N},\ n > m,\ p > 0,\ q > 0)$;

(Ⅱ$_1$) $x^3 - px^2 - qx + r = 0\ (p > 0,\ q > 0,\ r > 0$, 下同);

(Ⅱ$_2$) $x^3 - px^2 + qx + r = 0$;

(Ⅱ$_3$) $x^3 + px^2 - qx + r = 0$;

(Ⅱ$_4$) $x^3 - px^2 + qx - r = 0$。

的根的判别式。

对于(Ⅰ),汪莱判别式 $q \leqslant \frac{n-m}{n} p \left(\frac{m}{n} p\right)^{\frac{m}{n-m}}$ 是正确的[2]。对于(Ⅱ$_4$),按其变号法则,必有正根。给出其他 3 个方程的错误判别式:

$$(\text{Ⅱ}_1)\ r \leqslant \frac{-p + 2\sqrt{p^2 + 3q}}{3} \left(\frac{p + \sqrt{p^2 + 3q}}{3}\right)^2;$$

$$(\text{Ⅱ}_2)\ r \leqslant \frac{-p + 2\sqrt{p^2 - 3q}}{3} \left(\frac{p + \sqrt{p^2 - 3q}}{3}\right)^2;$$

$$(\text{Ⅱ}_3)\ r \leqslant \frac{p + 2\sqrt{p^2 + 3q}}{3} \left(\frac{-p + \sqrt{p^2 + 3q}}{3}\right)^2。$$

中日算家在判定根的存在性方面具有相似性。他们是如何获得这些判定法则的都不清楚。汪莱方程论研究并非立足于开方法,可能通过对特殊的二、三次方程作经验的归纳得出他的判别法,不具一般性。关孝和与李锐应是从增乘开方法实践中归纳出他们的判定法则。这种非演绎的归纳方式,很难保证他们所归纳的结论具有严密性,这是和算与清代方程论在根的

---

〔1〕 刘钝. 李锐与笛卡尔符号法则[J]. 自然科学史研究,1989,8(2):131.
〔2〕 李兆华. 汪莱方程论研究[A]. 洪万生主编. 谈天三友[C]. 台北:明文书局,1993:221.

判定方面都存在缺陷的主要原因。

2.3.4 关于方程变换

关孝和处理的方程变换包括以下 7 种：

① 叠商：对于 $a_0+a_1x^k+\cdots+a_mx^{mk}=0$，令 $x^k=y$，则 $a_0+a_1y+\cdots+a_mx^m=0$；

② 幂商：叠商的互逆问题；

③ 乘除商：已知 $f(x)=0$，求根为 $y=kx$ 的方程；

④ 增损商：已知 $f(x)=0$，求根为 $y=x\pm\frac{q}{p}x$ 的方程；

⑤ 加减商：已知 $f(x)=0$，求根为 $y=x\pm p$ 的方程；

⑥ 报商：已知 $f(x)=0$，求根为 $y=\frac{k}{x}$ 的方程；

⑦ 反商：已知 $f(x)=0$，求根为 $y=-x$ 的方程。

可概括为四类变换：

a. 倍根变换（③，④，⑦）；b. 反比例变换（⑥）；c. 乘幂变换（①，②）；d. 减根变换（⑤）。

汪莱没有这方面的论述，李锐《开方说》给出下述六条变换：

> ①“凡实方廉隅，如意立一数为母，遍乘之，如法开之，所得与不乘同[1]”，即 $kf(x)=0$ 与 $f(x)=0$ 同解；
>
> ②“凡实方廉隅，如意立一数为母，一除隅，再除廉，三除方，四除实，每上位则增一除，如是累除讫，如法开之，所得为母除所求数之数，以母乘之，得所求”，即
>
> $$若\ f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k x^k=0,\ g(y)=\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{b^{n-k}}y^k=0,则\ y=\frac{x}{b};$$
>
> ③“凡实方廉隅，如意立一数为母，一乘隅，再乘廉，三乘方，四乘实，每上一位则增一乘，如是累乘讫，如法开之，所得为母乘所求数之数，以母除之，得所求”，即

---

〔1〕 李锐. 开方说[A]. 郭书春主编. 中国科学技术典籍通汇・数学卷[Z](五). 郑州：河南教育出版社，1993：55.

若 $f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k x^k=0$，$g(y)=\sum_{k=0}^{n}a_k b^{n-k}y^k=0$，则 $y=bx$；

④“凡开方有正商负商者，以其实方廉隅之正负遍易之，如法开之，所得之正商负商与不易同”，即 $f(x)=0$ 与 $-f(x)=0$ 同解；

⑤“凡开方有正商负商者，以其实方廉隅之正负隔一位易之，如法开之，则所得正商变为负商，负商变为正商”，即：$f(x)=0$ 与 $f(-x)=0$ 的系数隔位异号；

⑥“凡开方有之分者，以子减母为余数，以余数与原实相加减[异加同减]复为实，如法开之，所得较原实所得必多一算”。

即对于 $f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k x^k=0$，若 $x=q+\dfrac{-f(q)}{f'(1)-f(q)}$，则 $[a_0+f'(1)]+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=0$ 的根为 $q+1$。

李锐这六条中，第②，③两条是等价的，而第①，④，⑤三条是第②条的特例，故前五条归纳起来为一条倍根变换，第⑥条是减根变换。

方程变换源于寻求方程特殊解法，关孝和与李锐都是从增乘开方法中获得这些变换的。和算方程变换有着解隐题、伏题的数学问题背景，方程来源十分丰富，这是和算方程变换较为丰富的原因之所在。

2.3.5 实根的有理逼近

开方演算必然会遇到开方不尽的问题，为了解决这一矛盾，必须以有理根逼近无理根。中算家早在《九章》中采用了“开方不尽以面命之”的办法。至于是否由“以面命之”完成实数系？中国数学史界尚有争论[1][2][3]。

刘徽通过以十进分数逼近实根的办法“求微数”，而且还提出“加借算”与“不加借算”的近似法：$\sqrt{a^2+r}=a+\dfrac{r}{2a}$ 或 $\sqrt{a^2+r}=a+\dfrac{r}{2a+1}$。这一传统为《孙子算经》、《张丘建算经》、《夏侯阳算经》以及《五经算术》所继承。

随着高次方程求解的增乘开方法的出现，以有理分数逼近实根的方法

---

〔1〕 李继闵．刘徽关于无理数的论述[J]．西北大学学报(自然科学版)，1989(1)：1-4.
〔2〕 李国伟．《九章算术》与不可公度量[J]．自然辩证法通讯，1994(2)：49-54.
〔3〕 王荣彬．再评刘徽对无理的根数的论述[J]．科学技术与辩证法，1996(3)：43-46.

在宋元时期又有所发展。秦九韶《数书九章》的“竹器验雪”题[1]，对方程 $f(x)=0$ 给出下列近似法：

$$x=q+\frac{-f(q)}{f'(q)+\frac{1}{2!}f''(q)+\frac{1}{3!}f^{(3)}(q)+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(q)} \tag{2.6}$$

朱世杰《四元玉鉴》卷中“三率究圆”第十三问采取同样的方法[2]。这是刘徽方法在高次方程情形上的延续。

方程论在清代复兴时没有出现有关实根逼近问题的研究。与此相反，在和算方程论中却有了长足进步，关孝和称之为“穷商”与“通商”。所谓穷商，即以有理数逼近实数根，其逼近方式，关孝和叙之如下：

> 是究商数畸零之微也，开实数有不尽者，随开出位数，以方除实[同名除者，是得负数，异名除者，定得正数也]，以其数，依正负加减于开商，为次商，以之自原式隅命之，至实加减之，亦自隅至方加减之，以其方随次商位数除其实，以得数加减于次商为三商[或依数有至尾位而生微差者，是故为定商，则略末一位而用之]，次第如此，得各级定商[3]。

就是说，对于开方式 $f(x)=0$，开出初商 q_1后，以 $q_2=q_1+\frac{-f(q_1)}{f'(q_1)}$ 为次商，再以 q_2为初商开方，则以 $q_3=q_2+\frac{-f(q_2)}{f'(q_2)}$ 为三商，逐次下去，即

$$\begin{cases} q_k=q_{k-1}+\dfrac{-f(q_{k-1})}{f'(q_{k-1})} \\ \lim\limits_{k\to\infty} q_k=q \end{cases}$$

这一算法程序，实际上就是求方程实数解的所谓 Newton 迭代法。

所谓“通商”，就是求实根的近似分数，其法如下：

> 若实数不能开尽而命分者，从实至隅[或起于隅至实者，亦同]，余数依遍约法，各约之，以实为分子，自方逐下，诸级正负相通而各为分母，命

---

〔1〕秦九韶. 数书九章[A]. 靖玉树主编. 中国历代算学集成[Z]. 济南：山东人民出版社，1994：518.

〔2〕朱世杰. 四元玉鉴[M]. 万有文库本. 北京：商务印书馆，1937：364.

〔3〕関孝和. 開方算式[A]. 平山諦，下平和夫，広瀬秀雄編. 関孝和全集[Z]. 大阪：大阪教育図書，1974：261.

之也[1]。

对于这段术文,藤原松三郎与平山谛有不同的理解,分歧在于对"自方逐下,诸级正负相通而各为分母"如何解释?藤原[2]认为关孝和的通商办法是式(2.6),而平山谛[3]则认为是

$$x = q + \frac{-f(q)}{f'(q) + \frac{1}{2!}f''(q)x + \frac{1}{3!}f^{(3)}(q)x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(q)x^{n-1}} \tag{2.7}$$

由秦九韶命分法来看,藤原的理解是正确的。现在还不能肯定关孝和通商方法直接来源于秦九韶的著作或《四元玉鉴》,但可以认为这种求高次方程实数解的命分方法,是中国传统数学中的普通方法,关孝和通商法可能是对中算传统的继承。

关于关孝和 Newton 迭代法的算法基础与思想来源,三上义夫认为是依据中算盈不足术而立术的,盈不足术是双假设,Newton 迭代法是单假设,他以关孝和之后和算家常以盈不足术解高次方程作为佐证[4]。三上这种意见存在两个问题:首先,盈不足术的假设法与迭代算法在数学本质上是有差别的,假设法是通过试验间接获得问题的解,而迭代是通过数值逼近寻求问题的精确解,从而在试验数值的选择上存在很大差别;其次,以关孝和之后的情况解释关孝和方法,不一定可靠。

如果三上的意见合理的话,则存在关孝和的迭代法来源于《同文算指》(1614)"盈朒迭代法"的可能性。《同文算指前编》卷六中给出开平方的下述"盈朒迭代法":

对于 $\sqrt{N} = \sqrt{q_0^2 + r_0}$ $(q_0 < q < q_0 + 1)$,由盈不足术:

商 q_0,盈 r_0,商 $q'_0 = q_0 + 1$,朒 r'_0,则 $q_1 = q_0 + \frac{r_0}{q'_0 + q_0} = q_0 + \frac{r_0}{2q_0 + 1}$;

---

〔1〕 関孝和. 開方算式[A]. 平山諦,下平和夫,広瀬秀雄編. 関孝和全集[Z]. 大阪:大阪教育図書,1974:262.
〔2〕 学士院. 明治前日本数学史[M]. 第二卷,東京:岩波書店,1954:222.
〔3〕 平山諦. 関孝和[M]. 東京:恒星社厚生閣,1981:133.
〔4〕 三上義夫. 関孝和の業績と京阪の算家並に支那の算法との関係及び比較[J]. 東洋学報,1933(21):570.

商 q_1，盈 r_1，商 $q'_0=q_0+1$，朒 r'_0，则 $q_2=q_1+\dfrac{r_1}{q'_0+q_1}=q_1+\dfrac{r_1}{q_0+q_1+1}$；

逐次下去，作迭代：$\begin{cases} q_k=q_{k-1}+\dfrac{r_{k-1}}{1+q_0+q_{k-1}} \\ r_{k-1}=N-q_{k-1}^2 \end{cases}$，则 $\lim\limits_{k\to\infty} q_k=q$。

这种迭代法是克拉维斯(Christopher Clavius，1537～1612)的方法[1]。如果关孝和读过《同文算指》，他的迭代法就是将克拉维斯迭代法在高次方程求解上的应用。这一点尚无史料支持，不必下结论。

按中算传统，处理无穷问题是十分普通的，刘徽在以无限十进分数逼近方程实根时说："微数无名者以为分子，其一退以十为母，其再退以反为母，退之弥下，其分弥细，则朱幂虽有所弃之数，不足言之也"[2]。这是古代数学家求"商数畸零之微"信念之所依。同时，古算家在开方实践中清楚认识到，初商越接近真商，则余实越小，如果增乘开方法能突破数字开方而代数化，即各次商不受正整数限制，那么从开方法内部来说，开方迭代逼近则是开方求微数的十分自然的发展结果。和算开方代数化正好提供了这一发展前提，这在中算开方模式中是无法实现的。至于以取 Newton 形式近似法：$q_2=q_1+\dfrac{-f(q_1)}{f'(q_1)}$，仍可从中算传统得到解释。按照秦九韶近似法的式(2.6)，$f'(q_1)$是"法"的主要项，为迭代计算方便，略去其余各项，并不影响逐步逼近。因此，笔者认为，关孝和 Newton 迭代法是刘徽求微数思想在和算开方代数化进程中继续发展的必然后果。

2.4　久留岛义太的迭代法

和算关于高次方程的数值解法，在18世纪中叶以后又出现新的进步，主要是数学天才久留岛义太(Kurushima Yoshihiro，？～1757)作出的。

久留岛义太是继关孝和、建部贤弘之后数学水平最高的和算家，在和算算法创造方面业绩最为突出。他靠自学而成为数学名家，不属于任何和算流派，

---

〔1〕 李俨. 中算家的平方零约术[A]. 中算史论丛[C]. 第一集. 北京：科学出版社，1954：97.
〔2〕 郭书春汇校. 九章算术[M]. 沈阳：辽宁教育出版社，1990：259.

其业绩可与关孝和、建部贤弘等人相提并论。久留岛义太特别擅长算法构造，在开方法方面，他首次采用 Newton 迭代法求解无穷级数形式的超越方程，而且还用今天所谓的 Newton 二分法来逼近函数极值点，还给出一种级数反演法。

在《背矢极限法》中，久留岛义太成功地解决了松永良弼所提出的一个数学问题：列背，以矢除之，问至少者[1]。即已知圆弧 p 及矢 h，求 $\frac{p}{h}$ 的最小值。

久留岛义太的求解过程如下：

立天元一为极背，自之，为径因泛矢四段，寄甲位；列背三乘幂，三除、四除、径幂除，所得为径因第一差四段，寄乙位；列背五乘幂，三除、四除、五除、六除、径三乘幂除，所得为径因第二差四段，寄丙位；列背七乘幂，三除、四除、五除、六除、七除、八除、径五乘幂除，所得为径因第三差四段，寄丁位。列甲，内减乙，加丙、减丁，为径因定矢四段，四之，寄左。与径因背、因极数十六段相消，而得左之式[2]。

设弧背为 p，泛矢为 h'，定矢为 h，直径为 d，依次求

$$p^2 = 4dh' = 4dA_0(\text{甲位},A_0\text{ 为原数})$$

$$\frac{p^4}{3\cdot4\cdot d^2} = 4dA_1(\text{乙位},A_1\text{ 为一差})$$

$$\frac{p^6}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot d^4} = 4dA_2(\text{丙位},A_2\text{ 为二差})$$

$$\frac{p^8}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot d^6} = 4dA_3(\text{丁位},A_3\text{ 为三差})$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

构造 h 的级数展开式，即 $4dh = \text{甲}-\text{乙}+\text{丙}-\text{丁}+\cdots$

亦即 $4dh = 4d[\,h' - A_1 + A_2 - A_3 + \cdots\,]$

$$= p^2 - \frac{p^4}{3\cdot4\cdot d^2} + \frac{p^6}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot d^4} -$$

[1] 有马赖徸(Arima Yoriyuki，1714～1783)的《輪台算書》也收录了此题及其解法，并明确指出是久留岛义太的数学成果。

[2] 久留岛義太. 背矢極限法[M]. 写本. 著作年代不详.

$$\frac{p^8}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot d^6}+\cdots$$

两边同乘以 4，并化简得

$$16dh=8d^2\left[\frac{1}{2!}\left(\frac{p}{d}\right)^2-\frac{1}{4!}\left(\frac{p}{d}\right)^4+\frac{1}{6!}\left(\frac{p}{d}\right)^6-\frac{1}{8!}\left(\frac{p}{d}\right)^8+\cdots\right]$$

$$\Rightarrow-16\left(\frac{h}{p}\right)\left(\frac{p}{d}\right)+8\left[\frac{1}{2!}\left(\frac{p}{d}\right)^2-\frac{1}{4!}\left(\frac{p}{d}\right)^4+\frac{1}{6!}\left(\frac{p}{d}\right)^6-\frac{1}{8!}\left(\frac{p}{d}\right)^8+\cdots\right]=0$$

令 $d=1$，$\frac{h}{p}=y$，则上式化为

$$-16py+8\left[\frac{1}{2!}p^2-\frac{1}{4!}p^4+\frac{1}{6!}p^6-\frac{1}{8!}p^8+\cdots\right]=0 \qquad (2.8)$$

现在求 $\frac{p}{h}$ 的最小值，就是求 y 的最大值。首先对式(2.8)通过“适尽方级法”求其一阶导数，得

$$-16y+8p-\frac{4}{3}p^3+\frac{1}{3\cdot5}p^5-\frac{1}{3\cdot5\cdot6\cdot7}p^7+\cdots=0 \qquad (2.9)$$

式(2.9)乘以 p，与式(2.8)相减，得

$$4p^2-p^4+\frac{1}{3\cdot6}p^6-\frac{1}{3\cdot5\cdot6\cdot8}p^8+\frac{1}{3\cdot5\cdot7\cdot6\cdot8\cdot10}p^{10}-\cdots=0 \qquad (2.10)$$

令 $p^2=x$，则式(2.10)等价于

$$4x-x^2+\frac{x^3}{3\cdot6}-\frac{x^4}{3\cdot5\cdot6\cdot8}+\frac{x^5}{3\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot10}-\cdots=0$$

两边同除以 x，得

$$\varphi(x)=4-x+\frac{x^2}{3\cdot6}-\frac{x^3}{3\cdot5\cdot6\cdot8}+\frac{x^4}{3\cdot5\cdot7\cdot6\cdot8\cdot10}-\cdots=0 \qquad (2.11)$$

求函数 $\varphi(x)$ 的极值，需要解超越方程(2.11)求稳定点。久留岛义太采用逐次近似法求解：

取前二项 $4-x=0$，得根 $x_1=4$（强式）

取前三项 $4-x+\frac{x^2}{3\cdot 6}=0$，得根 $x_2=6$（弱式）

取前四项 $4-x+\frac{x^2}{3\cdot 6}-\frac{x^3}{3\cdot 5\cdot 6\cdot 8}=0$，得根 $x_3=5.4$（强式）

取前五项 $4-x+\frac{x^2}{3\cdot 6}-\frac{x^3}{3\cdot 5\cdot 6\cdot 8}+\frac{x^4}{3\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 10}=0$，得根 $x_4=5.435$（弱式）

…………………

随后，久留岛义太指出：

> 如此开之，则弱式商增，强式商损，而上位渐定焉，名之清数，下位淤浊辽远而求至难见，谓之酌清之法，愈委开除之，则下位淤浊，殆不有矣。依之谓酌清，恰如浊水之温而清，故谓酌清[1]。

不仅如此，久留岛义太还以 $x_3=5.4$ 为初始值，采取迭代法逐次求精密近似解：

$$A_1=1-\left(1-\left(1-\left(1-\left(1-\frac{x_3}{9\cdot 12}\right)\frac{x_3}{7\cdot 10}\right)\frac{x_3}{5\cdot 8}\right)\frac{x_3}{3\cdot 6}\right)\frac{x_3}{1\cdot 4}$$

$$B_1=\left(1-\left(2-\left(3-\left(4-\frac{5x_3}{9\cdot 12}\right)\frac{x_3}{7\cdot 10}\right)\frac{x_3}{5\cdot 8}\right)\frac{x_3}{3\cdot 6}\right)\frac{x_3}{1\cdot 4}$$

$$x_4=x_3+\frac{A_1}{B_1}=5.4+0.034=5.434$$

$$A_2=4-\left\{1-\left[1-\left(1-\left(1-\left(1-\left(1-\frac{x_4}{13\cdot 16}\right)\frac{x_4}{11\cdot 14}\right)\frac{x_4}{9\cdot 12}\right)\frac{x_4}{7\cdot 10}\right)\frac{x_4}{5\cdot 8}\right]\frac{x_4}{3\cdot 6}\right\}x_4$$

$$B_2=1-\left\{2-\left[3-\left(4-\left(5-\left(6-\frac{7x_4}{13\cdot 16}\right)\frac{x_4}{11\cdot 14}\right)\frac{x_4}{9\cdot 12}\right)\frac{x_4}{7\cdot 10}\right]\frac{x_4}{5\cdot 8}\right\}\frac{x_4}{3\cdot 6}$$

$$x_5=x_4+\frac{A_2}{B_2}=5.434+0.000\,13=5.434\,13$$

逐次迭代下去逐一求 x_k，以逼近超越方程(2.11)的实数根。

---

〔1〕 久留岛義太. 背矢極限法[M]. 写本.

如果把取方程(2.11)的前 6 项构成的方程记做 $\varphi_3(x)$，取前 $k+3$ 项构成的方程记做 $\varphi_k(x)$，则事实上，

$$A_1 = 1 - \frac{x_3}{1 \cdot 4} + \frac{x_3^2}{1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6} - \frac{x_3^3}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \frac{x_3^4}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} - \frac{x_3^5}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12} = \frac{\varphi_3(x_3)}{4}$$

$$B_1 = \frac{1}{1 \cdot 4} - \frac{2x_3}{1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{3x_3^2}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} - \frac{4x_3^3}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} + \frac{5x_3^4}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12} = \frac{\varphi_3'(x_3)}{4}$$

所以，$x_4 = x_3 - \dfrac{\varphi_3(x_3)}{\varphi_3'(x_3)}$，同样，$x_5 = x_4 - \dfrac{\varphi_4(x_4)}{\varphi_4'(x_4)}$，即 $x_{k+1} = x_k - \dfrac{\varphi_k(x_k)}{\varphi_k'(x_k)}$

这种算法实际上就是 Newton 迭代法。

2.5 久留岛义太的执中法

所谓 Nowton 二分法，是求方程

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-3}x^{n-3} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \ (a_n \neq 0)$$

在区间$[a, b]$内的一个近似解(误差不超过 ε)的算法。其算法步骤可表示如下：

第一步：取$[a, b]$的中点 $x_0 = \dfrac{a+b}{2}$，区间一分为二；

第二步：若 $f(x_0) = 0$，则 x_0 就是方程的根，否则判断根 x^* 在 x_0 的左侧还是右侧：

若 $f(a)f(x_0) > 0$，则 $x^* \in (x_0, b)$，以 x_0 代替 a；

若 $f(a)f(x_0) < 0$，则 $x^* \in (a, x_0)$，以 x_0 代替 b；

第三步：若 $|a-b|<q$，计算终止，此时 $x^* \approx x_0$，否则转到第一步。

二分搜索的过程是一个多次重复的过程，即用循环结构的算法程序，框图如图 2.6：

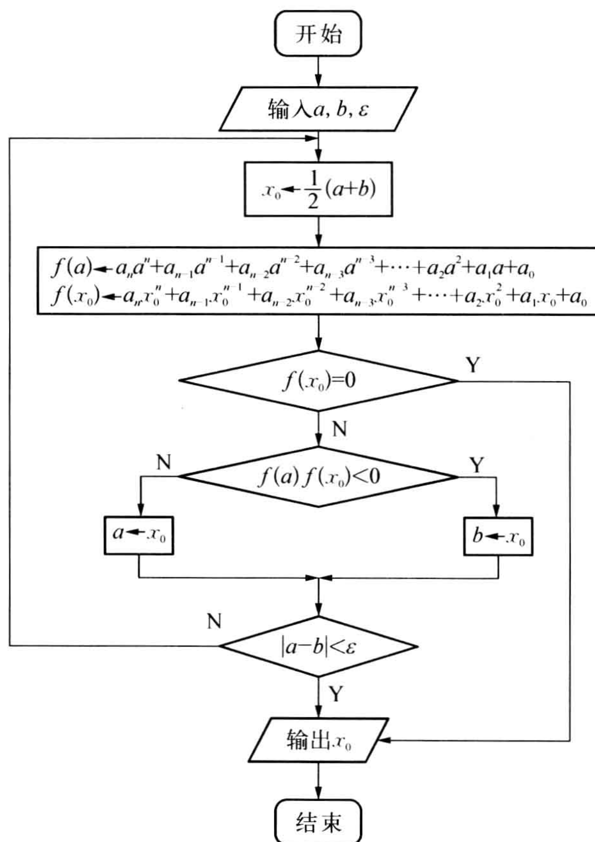


图 2.6　二分法算法程序框图

久留岛义太的执中法，见于抄本《久氏弧背草》（如图 2.7），其问题及解答过程如下：

凡列背，以矢除之，得数必不下二个七分六厘〇一丝，是至少极限也。

列周法，以极率除之，得二个七六有奇也。

列矢，以分母乘之，为实，以分子因径除之，名背率，至多者谓之极率，求之也，前后背率渐俟微齐者，而后执厥中知焉〔1〕。

〔1〕 另有单行抄本《执中法》，其后半部分内容与《久氏弧背草》中的"背矢极限法"一致，前半部分内容是用平均法求同一问题的近似解。

这个问题在和算中称做“圆理极数术”。问题是：在圆中，求弧长 p 与相应矢 h 的比值 $\frac{p}{h}$ 的最小值。久留岛义太给出的最小值是 2.760 1，即所谓的“极率” $\frac{p}{h} \geqslant 2.7601$。久留岛义太在题后给出“执中之法”来求这个极值，其术曰：

> 前后矢相乘之，寄甲位，加径幂，内减因径两矢和，余平方开之，寄乙位。列甲位，平方开之，得数加径，内减乙位，余半之，则中间矢。

这段术文给出以下“执中”公式（弧背 p_k 对应的矢为 h_k）：

对于 $p_k = \dfrac{p_m + p_n}{2}$ 时，则

$$h_k = \frac{\sqrt{h_m h_n} + d - \sqrt{h_m h_n + d^2 - d(h_m + h_n)}}{2} \tag{2.12}$$

不难证明，“执中”公式(2.12)是正确的（久留岛义太本人没有给出证明）。

随后，久留岛义太从 $p_1 = \dfrac{1}{2}$，$h_1 = 0.5$；$p_2 = 1$，$h_2 = 1$（此时 $\dfrac{p}{h}$ 都等于 1，即所谓的背率为 1，其中 $d=1$）出发，反复利用“执中”公式(2.12)求 p_k，h_k 序列，以逼近 $\dfrac{p}{h}$，从而求得其最小值时的 p 和 h。久留岛义太演算过程如下（如图 2.7）。

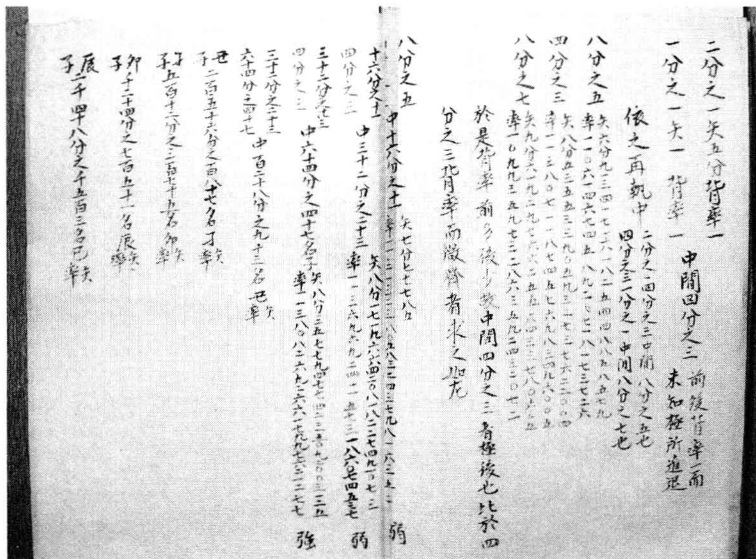

二分之一矢五分背率一
一分之一矢一　背率一　中間四分之三　前後背率一而未知程所進退
依之再執中

图 2.7　久留岛义太的《执中之法》

径一，矢五分，是半圆也，谓之二角，又为二分之一；

径一，矢一，是全圆也，谓之一角，又为一分之一；

二分之一、矢五分、背率一
一分之一、矢一、背率一 中间四分之三 前后背率一而
未知极所进退

依之再执中 二分之一、四分之三、中间八分之五也
四分之三、一分之一、中间八分之七也

八分之五 矢六分九一三四一七一六一八二五四四八八五八五七九
率一·一〇六一四六七四五八二〇七一八一七三七二六

四分之三 矢八分五三五五三三九〇五九三二七三七六二二〇〇四
率一·一三八〇七一一八七四五七六九八三四九六〇〇五

八分之七 矢九分六一九三九七六六二五五六四三三七八〇六三五
率一·〇九九三五九七三二八六三五九二四三二〇七二

于是背率前多后少，故中间四分之三者，极后也。此于四分之三背率而微齐者，求之如左。

八分之五
四分之三 中一十六分之一十一 矢七分七七七八五一六五〇九八一一一二三七四二
率一一三一三二三八〇五八三二四三七九八一六三五二 弱

十六分之十一
四分之三 中三十二分之二十三 矢八分一七一九六六四二〇八一八二三七四九
率一一三六九六九二四一一五七三一八六〇七

一〇七三
四五三七 弱

三十二分之二十三
四分之三 中六十四分之四十七 名矢八分三五七七九四七七四二三五〇
子率一一三八〇八二六九二六六一七九

九二〇〇三一二五
九七六二一二七七 强

三十二分之二十三
六十四分四十七 中一百二十八分之九十三 名丑
矢率

丑
子 中二百五十六分之一百八十七 名寅
矢率

寅
子 中五百一十二分之三百七十五 名卯
矢率

卯
子 中一千〇二十四分之七百五十一 名辰
矢率

辰
子 中二千〇四十八分之一千五百〇三 名巳
矢率

巳
子 中四千〇九十六分之三千〇〇七 名午
矢率

八百三十八万八千六百〇八分之六百二十二万四千五百〇九

极矢 八分四四五七八八六八二〇二九

极率 一一三八二一六八五二六九

三分之二，矢，七分五厘

五分之四，矢，九分〇四五〇八四九七一八七四七三一二〇五一一

十五分之十一，矢，八分三四五六五三〇三一七九四二九一〇六九一三一

极背幂，五个四三四一三一五〇四三〇四

配，七分四二〇一九二九六三〇〇

极背，二个三三一一二二三七〇〇八三

二千六百九十四分之一千九百九十九强

六万三千一百二十一分之四万六千八百三十七弱

五十七万〇七百八十三分之四十二万三千五百三十二弱[1]

以下解释这段术文。设圆直径 $d=1$，则圆周长 $C=\pi d=\pi$。当 $h_1=1$ 时，$h_1=d=1$，$p'_1=\pi d=\pi$，$p_1=\dfrac{p'_1}{\pi}=1$，当 $h_2=\dfrac{1}{2}$ 时，$h_2=\dfrac{d}{2}=\dfrac{1}{2}$，$p'_2=\dfrac{C}{2}=\dfrac{\pi}{2}$，$p_2=\dfrac{p'_2}{\pi}=\dfrac{1}{2}$。这两种特殊情形下，$\dfrac{h}{p}=1$。

同样，记 $\dfrac{p'_2}{\pi}=p_2$。久留岛义太认为，弧背的极值点 p^* 在区间 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 内，采用二分法来确定这个极值点。首先求区间 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 的中点

$$p_3=\frac{p_1+p_2}{2}=\left(\frac{1}{2}+1\right)\div 2=\frac{3}{4},$$

再根据"执中"公式(2.12)求相应的 $h_3=0.853\ 553\ 390\ 593\ 273\ 762\ 200\ 4$，于是

$$率\ \frac{h_3}{p_3}=1.138\ 071\ 187\ 457\ 698\ 349\ 600\ 5$$

这个极值点 p^* 可能在前半个区间 $\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{4}\right]$ 内，也有可能在后半个区间 $\left[\dfrac{3}{4},1\right]$ 内，所以分别求这两个区间的中点，前一区间中点为

$$p_4=\frac{p_1+p_3}{2}=\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)\div 2=\frac{5}{8}$$

---

[1] 久留岛義太. 執中之法[M]. 学士院図書館藏写本，1760 号.

由"执中"公式(2.12)得 $h_4=0.691\,341\,716\,182\,544\,885\,857\,9$，且

$$率\ \frac{h_4}{p_4}=1.106\,146\,745\,820\,718\,173\,726$$

后一区间中点为

$$p'_4=\frac{p_2+p_3}{2}=\left(\frac{3}{4}+1\right)\div 2=\frac{7}{8},$$

由"执中"公式(2.12)得 $h'_4=0.961\,939\,766\,255\,643\,378\,063\,5$，且

$$率\ \frac{h'_4}{p'_4}=1.099\,359\,732\,863\,592\,432\,072$$

比较 $p_3=\frac{3}{4}$，$p_4=\frac{5}{8}$，$p'_4=\frac{7}{8}$ 时的各率大小，显然 $p_3=\frac{3}{4}$ 时，$\frac{h_3}{p_3}$ 最大，而且 $p_4=\frac{5}{8}$ 时的率大于 $p'_4=\frac{7}{8}$ 时的率，大小顺序关系如下：

$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$	1
1	前多1.106 146 745 820 718 173 726	极后1.138 071 187 457 698 349 600	后少1.106 146 745 820 718 173 726	1

所以使 $\frac{h}{p}$ 最大值点 $p^*\in\left[\frac{5}{8},\frac{3}{4}\right]$，再重复上述二分过程，求区间 $\left[\frac{5}{8},\frac{3}{4}\right]$ 的中点：

$$p_5=\frac{p_3+p_4}{2}=\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{8}\right)\div 2=\frac{11}{16}$$

由"执中"公式(2.12)得 $h_5=0.777\,785\,116\,509\,811\,123\,742$，且

$$率\frac{h_5}{p_5}=1.131\ 323\ 805\ 832\ 437\ 981\ 635\ 2$$

逐步下去，求

$$p_6=\frac{p_3+p_5}{2}=\left(\frac{3}{4}+\frac{11}{16}\right)\div 2=\frac{23}{32},$$

$$\left(p'_6=\frac{p_4+p_5}{2}=\left(\frac{5}{8}+\frac{11}{16}\right)\div 2=\frac{21}{32}\ 舍去\right)$$

$$h_6=0.817\ 196\ 642\ 081\ 823\ 749\ 107\ 3,$$

$$率\frac{h_6}{p_6}=1.136\ 969\ 241\ 157\ 318\ 607\ 453\ 7$$

$$p_7=\frac{p_3+p_6}{2}=\left(\frac{3}{4}+\frac{23}{32}\right)\div 2=\frac{47}{64},$$

$$\left(p'_7=\frac{p_5+p_6}{2}=\left(\frac{11}{16}+\frac{23}{32}\right)\div 2=\frac{45}{64}\ 舍去\right)$$

$$h_7=0.835\ 779\ 477\ 423\ 509\ 200\ 312\ 5,$$

$$率\frac{h_7}{p_7}=1.138\ 082\ 692\ 661\ 799\ 762\ 127\ 7$$

$$p_8=\frac{p_6+p_7}{2}=\left(\frac{23}{32}+\frac{47}{64}\right)\div 2=\frac{93}{128},\ h_8=略,\ 率\frac{h_8}{p_8}=略$$

$$p_9=\frac{p_7+p_8}{2}=\left(\frac{47}{64}+\frac{93}{128}\right)\div 2=\frac{187}{256},\ h_9=略,\ 率\frac{h_9}{p_9}=略$$

$$p_{10}=\frac{p_7+p_9}{2}=\left(\frac{47}{64}+\frac{187}{256}\right)\div 2=\frac{375}{512},\ h_{10}=略,\ 率\frac{h_{10}}{p_{10}}=略$$

$$p_{11}=\frac{p_7+p_{10}}{2}=\left(\frac{47}{64}+\frac{375}{512}\right)\div 2=\frac{751}{1\ 024},\ h_{11}=略,率\frac{h_{11}}{p_{11}}=略$$

$$p_{12}=\frac{p_7+p_{11}}{2}=\left(\frac{47}{64}+\frac{751}{1\ 024}\right)\div 2=\frac{1\ 503}{2\ 048},\ h_{12}=略,率\frac{h_{12}}{p_{12}}=略$$

$$p_{13}=\frac{p_7+p_9}{2}=\left(\frac{47}{64}+\frac{1\ 503}{2\ 048}\right)\div 2=\frac{3\ 007}{4\ 096},\ h_{13}=略,率\frac{h_{13}}{p_{13}}=略$$

…… …… …… …… …… ……

$$p_{24}=\frac{p_7+p_{23}}{2}=\frac{6\ 224\ 509}{8\ 388\ 608},\ h_{24}=0.844\ 578\ 868\ 202\ 9,$$

率$\frac{h_{24}}{p_{24}} = 1.138\ 216\ 852\ 69$

这时,极背 $p = \pi p^* \approx \pi p_{24}$,于是,

极背 $p = \pi p^* \approx \pi p_{24} = \frac{6\ 224\ 509}{8\ 388\ 608}\pi = 2.331\ 122\ 370\ 083$,

极率 $\frac{p}{h} = \frac{\pi p_{24}}{h_{24}} = \frac{\pi}{1.138\ 216\ 852\ 69} = 2.760\ 1$。

本章小结

以上我们对和算与清代方程论的成就及其发生发展的脉络进行了较为详尽的分析与比较,现作归纳如下:

(1) 宋元时期的增乘开方法是中日方程论的基础。增乘开方法与立成开方法是互为表里的方法,关孝和可能通过开方作法本源图发现了这一算法,或可能增乘开方法在朝鲜和日本未失传,关孝和开方法是对中算开方法的继承。

(2) 随着和算旁书法代数方法的形成,和算家突破了数字开方的中算开方的算术传统而向代数化演进,从而从算法内部在中算基础上发展了方程理论,表现为:① 和算方程论发展历程为:开方代数化→多根认识→Newton 逐次压缩法→适尽诸级法→视商极数,包含了前述有关增乘开方法的四条定理;② 随着开方法代数化改进,关孝和不仅继承了中算传统的开方零约术(高次方程实根的分数近似法),而且将中算刘徽“求微数”思想及机械化算法思想发展为方程实根有理逼近的 Newton 迭代法;③ 在根的判别式研究中出现演绎方法的萌芽。

清代方程论虽也出现代数化变化,但没有突破数值开方的位置模式且受语言代数的限制,所以其成果的一般性程度不及和算。清代学者在对方程根的认识方面存在西学的部分影响,而且清代方程论内容不及和算丰富,仅部分地获得前述定理的前三条定理。从方程论发展的角度而论,中算传统过分强调算法中的位置是不利于代数学发展的。

(3) 中日数学家在根的判别上都做过努力。以往的研究曲解了关孝和的根的判别法则,实际上它可以相容地分解为三条判别法则,而其中前两条

都是正确的。

（4）以算法为中心，以归纳思维为主的东方数学研究制约中日方程论的进一步发展而存在一些局限性：① 中日数学家的建立在归纳基础上的根的存在性判定法则不够严密；② 都没有讨论根与系数的关系（汪莱、李锐的著述中有一些萌芽）；③ 都不讨论方程的公式解，这也许是因为增乘开方法的发达而无需方程求解公式。这些缺陷决定了中日方程论不会发展出复数理论与 Galois 理论。

（5）和算与清代方程论研究虽有共同的算法传统，但也有不同的问题背景与学术文化背景。朱世杰《算学启蒙》所表现的几何代数化的数学问题模式适合于偏好技艺、善于精雕细琢的日本文化，这类数学问题导致和算中以天元术为核心的代数学的发达，于是和算方程论不仅具有数学研究的实际问题背景，而且也具有技艺性；清代方程论是在经过明末清初的西算渗透后发掘整理古算的背景下发生的，所以汪莱、李锐的方程论研究仍然具有经学诠释的色彩，而缺乏解决大量实际问题的实践性，这是造成中日方程论差异的主要原因。

第 3 章

非线性方程组解法：解伏题*

随着计算机科学的发展，近年来以数学定理的机器证明为核心的数学机械化问题，成为数学研究的热点之一。追溯中外数学机械化思想的发展史，具有历史意义和现实意义。以计算为中心、具有机械性和程序性的中算传统，对现代计算代数和代数化几何研究富有启发，它是几何定理机器证明领域中“吴方法”[1]的思想源泉。中算机械化数学传统在宋元时期发展到了顶峰，但在朱世杰的四元术之后便走向衰落。所幸的是，这一传统在 17 世纪以后为和算家所继承，突出表现为和算“解伏题”消元方法的建立及其影响下的代数化几何的发达。

和算解伏题，即多元高次代数方程组求解问题，是和算家对天元术的重要发展。和算家在消元过程中发明了行列式算法，由于和算行列式算法是世界数学史上的初创性成果，因而自从日本学者林鹤一[2]（1873～1935）揭示这一成就以来，日本学术界一直非常重视解伏题在行列式理论方面的历史价值，而忽视了解伏题本身作为消元理论在数学机械化方面的意义与价值。本章以此视角讨论和算解伏题的消元理论及其科学意义，由此来揭示

---

* 本章内容曾发表于《自然科学史研究》，2001，20(2)：120－131，及《自然科学史研究》，2008，27(4)：471－484.

〔1〕 吴方法，即中国数学家吴文俊于 20 世纪 70 年代后期开始建立的一种实现数学定理的机器证明的机械化方法。由三个主要步骤构成：① 几何的代数化，从几何的公理系统出发，引进数系统与坐标系统，把几何问题转化为代数问题；② 几何的机械化，将几何定理假设部分的代数关系进行整理，再设计机械化步骤验证定理结论部分的代数关系是否可从假设部分已整理成序的代数关系推出；③ 根据第二步的机械化步骤编制算法程序，在计算机上实现。

〔2〕 Hayashi, The Fukudai and determinants in Japanese mathematics[J]. 東京数学物理学会記事. 1910，5(2). 另见：林鹤一博士和算研究集録[C]. 東京：東京開成館，1937.

和算发达的代数化几何的数学文化特质，并介绍现代计算代数中的“吴方法”与 Gröbner 基方法在和算代数化几何研究中的应用。

3.1 中国的几何代数化传统与消元法

希腊几何学与其说是空间研究，还不如说是逻辑结构研究。与之相对，中国传统数学自《九章算术》以来，几何研究没有出现演绎形式，中国的几何不只是为解决现实问题的几何度量计算，而是作为代数学的附庸为解代数方程服务。《九章算术》勾股章的问题类型及其求解方式，随天元术的发明与使用，在宋元时期出现新的发展，几何代数化传统被进一步强化。宋元时期的数学家们对几何图形中的代数关系十分感兴趣，通常以几何问题为模型，建立代数方程或方程组。这种几何代数化传统成为中国数学的一大特色，也是中国数学机械化的主要途径。

宋元代数化几何的显著特征表现在以下诸方面。

首先，通过设计几何图形来构建代数关系，以建立代数方程或方程组，最终以开方术求代数方程的数值解。此在宋元数学著作《测圆海镜》(1248)、《四元玉鉴》(1303)和《算学启蒙》(1299)中有突出反映。李冶的《测圆海镜》据“洞渊九容术”演绎而成，集中国古代勾股容圆知识之大成。其卷一首列“圆城图式”[1](图 3.1)，乃由一个圆与 15 个勾股形构成的几何模型，由此来构造出“识别杂记”之 692 条代数公式，全书 170 个问题都围绕此图式而展开。卷二首先提出了该书所有问题之总假设，共设计出以天元术列出一元方程以求解的 170 个问题，其中一次方程 31 个，二次方程 106 个，三次方程 24 个，四次方程 20 个，六次方程 1 个，而“识别杂记”之 692 条代数关系式正是构造这些方程以及进行代数演算之依据。朱世杰的《四元玉鉴》与《算学启蒙》也是通过勾股形之

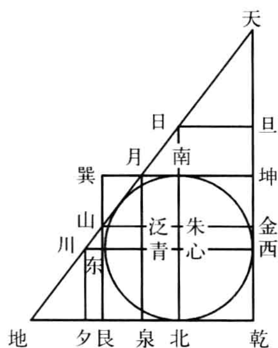


图 3.1　圆城图式

〔1〕 李冶. 测圆海镜[A]. 郭书春主编. 中国科学技术典籍通汇 · 数学卷[Z]. 第 1 册. 郑州：河南教育出版社，1993：732.

勾、股、弦、黄方(内接正方形边长)、勾股弦的五和与五较等，构造几者间的代数关系，以布列多元方程组。祖颐在《四元玉鉴》后序中对此概括得十分清楚：

松山朱汉卿先生演数有年，探三才之赜，索九章之隐，按天、地、人、物立成四元，以元气居中，立天勾、地股、人弦、物黄方，考图明之，上升下降，左进右退，互通变化，乘除往来，用假象真，以虚问实，错综正负，分成四式，必以寄之、剔之，余筹易位，横冲直撞，精而不杂，自然而然，消而和会，以成开方之式也[1]。

朱世杰目的是要“按天、地、人、物立成四元”、“用假象真，以虚问实，错综正负，分成四式”，最终“以成开方之式”。为实现这样的代数演算，他通过“立天勾、地股、人弦、物黄方”来构造几何模型，以“考图明之”。

其次，宋元时期代数化几何的显著特征还表现在形式化与抽象化方面。一般认为中国数学是以解决实际问题为中心的，所以数学概念基本上都是具体的、形象的，与希腊几何概念的抽象化形成鲜明的对照，但宋元时期出现了新变化。因为中国几何为代数服务，因此几何问题未必来源于现实世界，也并非为了解决实际问题的需要，从而其几何量所反映的数量关系往往并没有实际意义，而只是形式上的代数关系表达式。兹举两例以说明之。

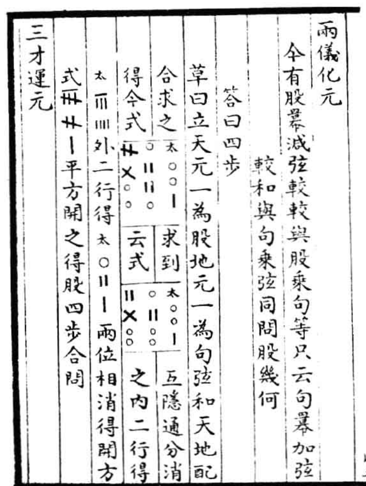

兩儀化元
今有股冪減弦較較與股乘句等只云句冪加弦較和與句乘弦同問股幾何
答曰四步
草曰立天元一為股地元一為句弦和天地配合求之求到互隱通分消得今式云式之內二行得外二行得兩位相消得開方式平方開之得股四步合問
三才運元

图 3.2　《四元玉鉴》“四象细草假令之图”

《四元玉鉴》“四象细草假令之图”之“两仪化元”问题如图 3.2 所示[2]：

记勾为 a、股为 b、弦为 c，弦较较为 $c-(b-a)$，弦较和为 $(b-a)+c$，所给条件为

$$b^2-[c-(b-a)]=ba\qquad(\text{今有})$$

〔1〕祖颐.《四元玉鉴》后序[A]. 郭书春主编. 中国科学技术典籍通汇·数学卷[Z]. 第 1 册. 郑州：河南教育出版社，1993：1206.

〔2〕朱世杰. 四元玉鉴[A]. 郭书春主编. 中国科学技术典籍通汇·数学卷[Z]. 第 1 册. 郑州：河南教育出版社，1993：1209.

$$a^2+[(b-a)+c]=ac \qquad (\text{只云})$$

求 b。

设 $b=x$，$c+a=y$，得方程组

$$\begin{cases}-2y^2-xy^2+2xy+2x^2y+x^3=0 & (\text{今式}) \\ 2y^2-xy^2+2xy+x^3=0 & (\text{云式})\end{cases}$$

该题中股幂 b^2 是二维几何量，弦较较 $[c-(b-a)]$ 是一维几何量，两者相减是没有实际意义的。同样，$a^2+[(b-a)+c]$ 也是没有实际意义的。

又如《算学启蒙》(1299)“开方释锁门”第 27 问：

> 今有圆田一段，周为实，平方开之，得数加入圆积，共得一百一十四步，问周径各几何？答曰：周三十六步，径一十二步[1]。

题中“周为实，平方开之得数”与“圆积”也是不同维的几何量，两者相加是没有实际意义的。这类情形广见于《四元玉鉴》和《算学启蒙》之天元术问题中。

宋元时期几何代数化是由于使用天元术或四元术而实现的，所以“演段”乃其代数演算的主要形式。由于四元式受空间的限制，宋元代数方法存在一些局限性，如果要引入更多的辅助未知数，布列方程组与其代数演算，以及非整式形式的代数式的表示等，都难以实现，这些只有使用文字代数或符号代数才能够克服。

3.2 《算学启蒙》在日传播与天元术的受容

宋元数学著作在中国失传期间，在李氏朝鲜和江户时代的日本却得到保存和传播，并且成为江户时代和算发达的基础。宋元算书中目前仅知《算学启蒙》与《杨辉算法》于 16 世纪末传播于日本，《测圆海镜》似有流播日本的形迹，但未见史籍明确记载。

《算学启蒙》3 卷，全书分为 20 门，259 问。卷前有 18 条预备知识，上中下三卷内容构成一个完整的算学体系，其中最具特色的内容包括增乘开方法、天元术、垛积术、招差术等。有关代数化几何问题散见于以下

---

〔1〕朱世杰. 算学启蒙[A]. 郭书春主编. 中国科学技术典籍通汇 · 数学卷[Z]. 第 1 册. 郑州：河南教育出版社，1993：1189.

各门：田亩形段门 16 问，商功修筑门 13 问，方程正负门 9 问，开方释锁门 34 问。

《算学启蒙》在朝鲜李朝作为选拔算官考试的指定参考书而被数次覆刻，最初的覆刻本是李朝初期世宗（1419～1450）时的活字本。《算学启蒙》与《杨辉算法》流入日本的确切时间今不可考，可能于 1592～1598 年的文禄庆长之役期间由朝鲜传入日本。现藏于日本筑波大学附属图书馆的《新编算学启蒙》，乃李朝世宗时期的刻本，原为养安院藏书[1]。

万治元年（1658），久田玄哲（Hisada Gentetsu，生卒年不详）、土师道云（Haji Doun，生卒年不详）刊训点本《算学启蒙》。据《数学记闻》称，其底本乃久田玄哲在洛东福寺偶得之《算学启蒙》，至于此本《算学启蒙》之原版本为朝鲜刻本还是中国的元刊本，日本学者有不同说法[2]。此训点本出版后，《算学启蒙》开始受到和算家的重视，随后出现了一些注解书。宽文十二年（1672）星野实宣（Hoshino Sanenobu，1638？～1699）刊《新编算学启蒙注解》（图 3.3），元禄三年（1690）建部贤弘著《算学启蒙谚解大成》七册（图 3.4），对《算学启发蒙》详细注解，此注解书不仅对《算学启蒙》中的算学知识在日本的普及起到十分重要的作用，而且建部本人的数学学习和研究

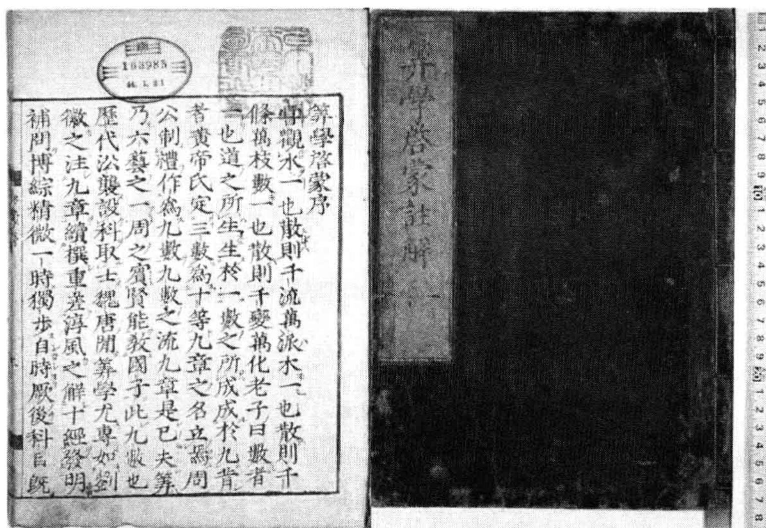
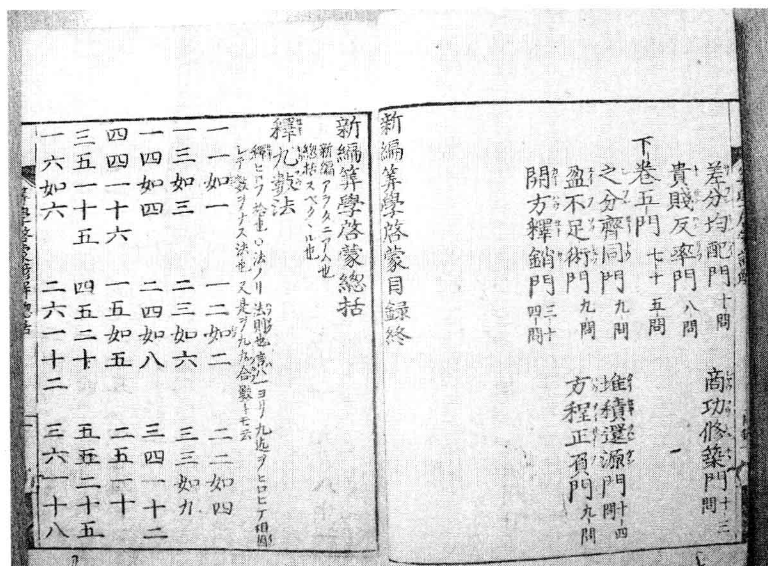

算學啓蒙序
中觀水一也散則千流萬派木一也散則千
條萬枝數一也散則千變萬化老子曰數者
一也道之所生生於一數之所成成於九昔
者黄帝氏定三數爲十等九章之名立焉周
公制禮作爲九數九數之流九章是已夫算
乃六藝之一周之賓賢能教國子此九數也
歷代沿襲設科取士魏唐開算學尤專如劉
徽之注九章續撰重差淳風之解十經發明
補問博綜精微一時獨步自時厥後科目既

图 3.3　星野实宣的《新编算学启蒙注解》(1672)

〔1〕 丰臣秀吉的侍医曲直濑正琳（Manase Shorin，1565～1611）的旧藏书。
〔2〕 冯立昇. 中日数学关系史研究[D]. 西安：西北大学，1999：34.

也受其影响颇深，其重要数学著作《缀术算经》(1722)之第二章“探立元”、第三章“探约分”、第四章“探招差”、第五章“织工”、第十章“探开方”等各章内容，就是分别基于《算学启蒙谚解大成》中的“开方释锁门”、“之分齐同门”、“堆积还原门”、“双据互换门”、“开方释锁门”而写的。


差分均配門 十問
貴賤反率門 八問
下巻五門 七十五問
之分齊同門 九問
盈不足術門 九問
開方釋鎖門 三十四問
商功修築門 十三問
堆積還源門 十四問
方程正負門 九問
新編算學啓蒙目録終

新編算學啓蒙總括
釋九數法
一一如一　一三如三　一四如四　四四一十六　三五一十五　一六如六
一二如二　二三如六　二四如八　一五如五　四五二十　二六一十二
二二如四　三三如九　三四一十二　二五一十　五五二十五　三六一十八

图 3.4　建部贤弘的《算学启蒙谚解大成》(1690)

和算家对天元术在中国的发展源流并不清楚，但对这一数学方法推崇备至。建部贤弘在《缀术算经》第二章“探立元”中称：

> 立元之法，未知始于何代，元至元年中，郭守敬修《授时历》用此法，同代大德年中，朱世杰所撰《算学启蒙》，具说解其法也[1]，是得索数之术之神法矣[2]。

福本道闲在《古今算法记》的序言中也称赞道：

> 夫天元一算者，真解难问奥妙也。凡天地之间，无不兼何而算数，算数亦无出天元中，是以学者为当务急[3]。

---

〔1〕此段以下文字，东大本没有，东大本在此句之后，缀“疑自西域所传”一句。认为元代的天元术传自西域，是作者(未必是建部本人，或许是后来的抄录者)的臆测，由此表明，和算家并不了解有《测圆海镜》等天元术著作。

〔2〕建部賢弘. 綴術算經[M]. 抄本. 享保七年(1722). 内閣文庫藏.

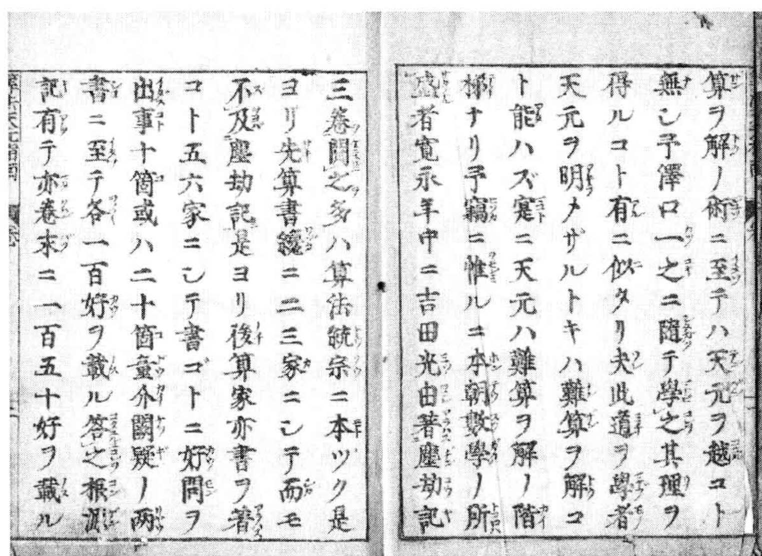
〔3〕沢口一之. 古今算法記[M]. 京極第五橋書林刊. 宽文十一年(1671). 東北大学図書館岡本文庫藏. 登録号：ws004636，索書号：035.

不过，和算家对天元术的理解经历了一段曲折，江户初期的和算因循明代算学，鲜用筹式，更不见使用天元术。与明代顾应祥等算家一样，江户初期的和算家也不明天元术理，如《算俎》(1663)中常云："以天元一为实"、"置天元一个内减二和利"等等，此类情形广见于和算早期著述中。久田玄哲的训点本《算学启蒙》出版后的十年间，和算家并不能真正理解天元术的意义，星野实宣的注解对"立天元一"未能道出其真义。

最初理解天元术并以之解答数学问题的和算家是桥本正数(Hashimoto Seisu，？～1683 年以前)与泽口一之师徒。据大岛喜侍(Ohshima Kiji，？～1733)的《见盘》记载：

正数与门人大坂岛屋町之住泽口三郎右卫门相共作《古今算法记》行于世，此本邦以天元术著書之始也[1]。

元禄十一年(1698)，泽口一之的弟子佐藤茂春著《算法天元指南》(图 3.5)，该书序言称：


算ヲ解ノ術ニ至テハ天元ヲ越コト
無シ予澤口一之ニ随テ學之其理ヲ
得ルコト有ニ似タリ夫此道ヲ學者
天元ヲ明メザルトキハ難算ヲ解コ
ト能ハズ寔ニ天元ハ難算ヲ解ノ階
梯ナリ予竊ニ惟ルニ本朝數學ノ所
盛者寛永年中ニ吉田光由著塵劫記

三巻開之多ハ算法統宗ニ本ツク是
ヨリ先算書纔ニ二三家ニシテ而モ
不及塵劫記是ヨリ後算家亦書ヲ著
コト五六家ニシテ書ゴトニ好問ヲ
出事十箇或ハ二十箇畫介闕疑ノ兩
書ニ至テ各一百好ヲ載ル答之根源
記有テ亦巻末ニ一百五十好ヲ載ル

图 3.5 佐藤茂春的《算法天元指南》(1698)序

至于解其难算之术，不越天元，随泽口一之学之，似得其理矣。学此道者，不明天元则不能解难算，天元实解难算之阶梯也。予窃惟本朝

[1] 转引自日本学士院. 明治前日本数学史[M]. 第一卷. 新訂版. 東京：野間科学医学資料館，1979：81.

数学所盛者，宽永年中，吉田光由著《尘劫记》三卷，阅之，多本《算法统宗》，此之先算书才二三家，而不及《尘劫记》，此后，算家亦著书者有五六家，各书出好问[1]十个或二十个，至《童介》、《阙疑》[2]两书，各载一百好，答之有《算法根源记》，亦卷末载一百五十好，世之算士阅之，其理幽远而苦法术，故泽口先生立天元一施之，一百五十好不满三十日而术成，因而宽文庚戌夏六月镂诸梓，以著《古今算法记》，尔以来，诸家算士有知天元解难算，诚本朝天元之元师也[3]。

此外，《数学纪闻》卷下也认为："在日本，天元之祖乃大坂川崎之手代桥本传兵卫。"

1671年，泽口一之著《古今算法记》（图3.6），首以天元术解答《算法根源记》遗题，开和算天元术应用之先河，迅即关孝和撰《阙疑抄一百问答术》、《勿惮改答术》以及解答《古今算法记》遗题的《发微算法》（1674），全以天元术解题，以《发微算法》的出版为标志，确立了天元术在和算中的中心地位。

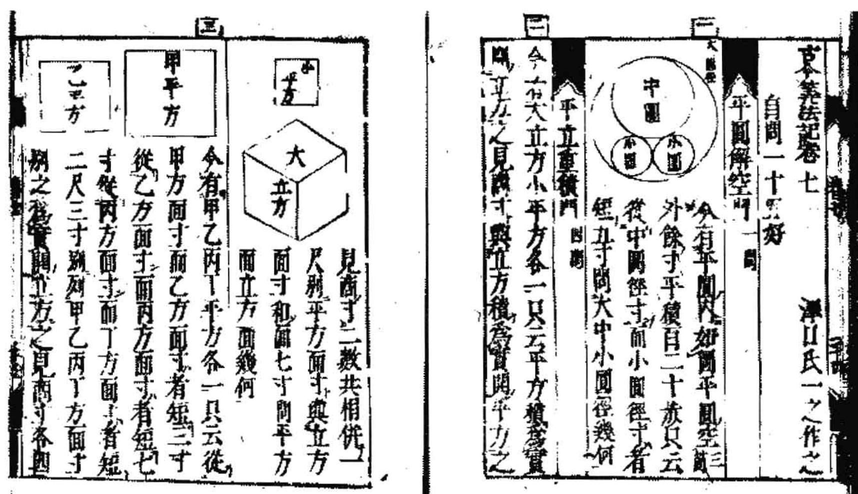

古今算法記巻七
自問一十五好
澤口氏一之作之
平圓解空門 一問
今有平圓内如圖平圓空三箇外餘寸平積百二十歩只云從中圓徑寸而小圓徑寸者短丑寸問大中小圓徑幾何
平立直積門 四問
今有大立方小平方各一只云平方積爲實開立方之見商寸與立方積爲實開平方之見商寸二數共相併一尺别平方面寸與立方面寸和爲七寸問平方面立方面幾何
今有甲乙丙丁平方各一只云從甲方面寸而乙方面寸者短三寸從乙方面寸而丙方面寸者短七寸從丙方面寸而丁方面寸者短二尺三寸

图3.6　泽口一之《古今算法记》(1670)

泽口一之《古今算法记》（1670）的前三卷为算学基本知识和日用算法，

---

〔1〕 好问，简称好，又称作"遗题"，指数学书后向读者征解的数学问题。

〔2〕 指《童介抄》（野沢定長著，1664）、《算法阙疑抄》（礒村吉德著，1661）两书。

〔3〕 佐藤茂春．算法天元指南[M]．序．田中荘兵衛刊．元禄十一年（1698）．東北大学図書館林文庫藏．登録号：ws005534．索書号：0054．

第三卷解答《改算记》(山田正重著,1659)的遗题,第四卷至第六卷以天元术解答《算法根源记》(佐藤正兴著,1669)的 150 个遗题,这是日本人正确使用天元术的开始。尤其重要的是,泽口一之在《古今算法记》书末,也提出了颇有难度的 15 个遗题,其中“平圆解空门”一问,“平积重积门”四问,“勾股积分门”六问,“平形斜积门”三问,“分子齐同门”一问。除最后一问外,其余 14 问都是代数化几何问题,这些几何问题无疑是模仿《算学启蒙》的天元术问题而构造的。正是这 15 个遗题刺激了和算家对天元术及其消元法的研究,并导致和算代数化几何学的发达。

1674 年,关孝和著《发微算法》;1678 年,田中由真(Tanaka Yoshizane,1651～1719)著《算法明解》;1695 年,宫城清行著《和汉算法》。这 3 本书都是以天元术解答《古今算法记》15 个遗题的重要著作,它们不仅促进了天元术的普及,而且也为和算消元法的形成奠定了基础。

延宝年间(1673～1680)至宝永年间(1704～1710)是和算奠基与鼎盛时期,其发达与进步是由于天元术的使用而引起的,其间出现的数学著作也是以天元术为中心的,主要者有:

《发微算法》(关孝和,1674)

《算法明解》(田中由真,1679)

《研几算法》(建部贤弘,1683)

《发微算法演段谚解》(建部贤弘,1685)

《三部抄》(关孝和,1685 年前后)

《明元算法》(宫城清行,1689)

《算法发挥》(井关知辰,1690)

《算学启蒙谚解大成》(建部贤弘,1690)

《七乘幂演段》(中根元圭,1691)

《和汉算法》(宫城清行,1695)

《算法天元录》(西胁利忠,1697)

《算法天元指南》(佐藤茂春,1698)

《算法天元樵谈录》(中村政荣,1702)

天元术除在布列多项式方程上的有效性外,还具有技艺性,复杂的几何图形计算正好适应这种技艺性需要,和算家通过《算学启蒙》继承了这一传统。

这种技艺性引发了数学问题的数量关系复杂化，随之而引入辅助未知数以建立多元方程组，这是天元术发展之必然。宋元数学家沿循位置代数传统向四元术演进，和算家却独辟蹊径，创立了“旁书法”而向文字代数转变。

所谓旁书法，按和算家的话说：“画正负段数，旁书其名。”[1]其表记原则可以归结为以下3条：

① 多项式常系数用筹码表示；

② 已知量、未知量均以汉字或简化汉字记录；

③ 多项式按天元式布置，系数仍为多项式时，则布于天元式之一级。如

⫽丨丨甲	丨甲丨乙	丨甲⫽乙	丨甲乙	丨甲 巾	丨甲 再	丨甲 三	丨甲 商	丨甲 再 商
$-3a$	$a+b$	$a-b$	ab	a^2	a^3	a^4	$\sqrt{a}$	$\sqrt[3]{a}$

旁书法首见于关孝和的《发微算法》和《解见题之法》（成书于1683年前后），与关氏同时代的京阪地区算家田中由真也使用旁书法，两者形式基本一致，仅局部有些差别。关孝和的旁书法是围绕天元式而展开的，其孙弟子松永良弼（？～1744）增加了分数表记法，如

四甲丨三乙	四甲⫽丨丨乙丙	四乙丨甲 分再丨巾 之
$\frac{3b}{4a}$	$\frac{-3bc}{4a}$	$\frac{a^2}{4b^3}$

将其发展为一般性的代数演算，后世和算家称之为点窜术和天生法。

和算旁书法的形成，除天元术发展的内部要求外，还存在文化方面的因素。宋元时代至明代，正是传统数学由筹算向珠算转变的历史时期，随着算具的更替，数学研究中笔的使用逐渐频繁，我们不难从宋元及明代算书中找到这种转变的痕迹。和算虽保存着筹具与筹算制度，但仅是形式上的，数学研究未必完全依赖筹算。这一点可从关孝和《勿惮改答术》的演算数据得到说明。该书以天元术布列高次方程的各项系数都高达近30位数字，若用筹算演算因空间限制，实际操作近乎不可能，只能借助于笔。

---

〔1〕 建部賢弘. 発微算法演段諺解[A]. 平山諦，下平和夫，広瀬秀雄編. 関孝和全集[Z]. 大阪：大阪教育図書，1974：512.

与四元术相比,旁书法表记空间大为缩小,具有较高的自由度,所以关孝和说:“易分之合之”[1]。与韦达符号体系相比,和算旁书法除在关系符号上的欠缺外,代数效果是一致的。当然也应注意到,和算代数法多以天元式为中心,加之东方算法化数学模式的局限,使和算代数法并不关心具有普遍意义的数量关系与形式演绎,因此其符号的抽象性程度较低,这是和算代数无法向近代代数学逾越的原因之一。

天元术的发达推动着多项式理论的发展,围绕多项式演算,中日都使用了“演段”,本书第1章已经做了考释与论述。

天元术的使用必然带来两种结果,一则数学代数化程度提高,再则数量关系的复杂化。和算家根据问题求解的难易程度,将数学问题分为见、隐、伏三类(建部贤弘《大成算经》分见、隐、伏、潜四类)。所谓见题,即以算术方法求解的简单问题;隐题指以一元方程求解的代数问题;伏题则是列多元方程组求解的代数问题。多元高次方程组求解,正如徐有壬、陈棠论四元术时所说:“四元不难于如积而难于相消”[2],消元是求解的关键,从而消元理论是和算解伏题的核心。

3.3 关孝和的解伏题及其数学机械化特征

解伏题方法最早见于关孝和《解伏题之法》(1683)以及建部贤弘等人编著的《大成算经》(1683~1711),两者内容基本一致,只不过后者叙述更为详细,它们是和算中最具系统性与简洁性的著述,笔者的研究主要依据这两种材料,它由“真虚”、“两式”、“定乘”、“换式”、“生尅”、“寄消”六个步骤构成,下面依其顺序分析其消元理论的内容与方法特征。为表述上的方便,这里引入吴文俊消元理论的符号系统(参阅吴文俊《解方程器或SOLVER软件系统概述》一文[3])。

对于关于变量 x_1, x_2, …, x_n 的多项式 F,若其中出现 x_i的最大下标 i

---

〔1〕 関孝和. 解見題之法[A]. 平山諦,下平和夫,広瀬秀雄編. 関孝和全集[Z]. 大阪:大阪教育図書,1974:512.
〔2〕 杜石然. 朱世杰研究[A]. 钱宝琮等著. 宋元数学史论文集[C]. 北京:科学出版社,1966:177.
〔3〕 吴文俊. 吴文俊论数学机械化[M]. 济南:山东教育出版社,1996:491.

称作 F 的类数，记为 $\mathrm{cls}(F)$；若 $\mathrm{cls}(F)>0$ 时，F 中 x_i 的最高次数称作 F 的次数，并记为 $\deg(F)$。

第一步：真虚。与中算概念一样，和算家称已知数为真数，未知数为虚数。而在方程论中，称目的未知数为真数，辅助未知数为虚数，目的未知数的方程叫真术，辅助未知数的方程叫虚术。真虚就是“随真术之所得而逐求虚术”，即根据所求的目的未知数而逐次布列辅助未知数的方程，建立设元以及消元的顺序原则。以《大成算经》之例解说如下：

假如有甲乙丙丁平方各一，甲云，甲方三乘幂、乙方再乘幂、丙方、丁方相并共若干；乙云，甲方再乘幂、乙方幂、丙方再乘幂、丁方三乘幂相并共若干；丙云，甲方幂、乙方、丙方三乘幂、丁方再乘幂相并共若干；丁云，甲方、乙方三乘幂、丙方幂、丁方幂相并共若干，问甲方。

真术求甲方。乙方再乘幂、丙方、丁方和[有]，乙方幂、丙方再乘幂、丁方三乘幂和[有]，乙方、丙方三乘幂、丁方再乘幂和[有]，乙方三乘幂、丙方幂、丁方幂和[有]，甲方[有]。

（初）虚术见乙方。丙方、丁方和[有]，丙方幂、丁方幂和[有]，丙方再乘幂、丁方三乘幂和[有]，丙方三乘幂、丁方再乘幂和[有]，甲方[有]，乙方[有]。

（次）虚术曰：立天元一为丙方，自之以减丁云、两和，余为丁方幂，寄左，列丙方以减甲云、丙和，余为丁方，自之与寄左相消得式，又列丙方，三自乘之，以减丙云、两和，余为丁方再乘幂，寄左。列丁方再自乘之，与寄左相消得式，复列丙方再自乘之，以减乙云、丙和，余为丁方三乘幂，寄右。列丁方三自乘之，与寄左相消得式[1]。

对于

$$\begin{cases} x_1^4 + x_2^3 + x_3 + x_4 = A_1 \\ x_1^3 + x_2^2 + x_3^3 + x_4^4 = A_2 \\ x_1^2 + x_2 + x_3^4 + x_4^3 = A_3 \\ x_1 + x_2^4 + x_3^2 + x_4^2 = A_4 \end{cases}$$

〔1〕 関孝和，建部賢明，建部賢弘編集. 大成算經[M]. 卷十七. 写本. 東北大学図書館狩野文庫藏. 登録号：ws006478，索書号：7.20820.20.

为求目的未知数 x_1，则依次引入辅助未知数 x_2，x_3，x_4，先设 x_3 为天元一，消去 x_4 得到三元方程组；再设 x_2 为天元一，消去 x_3 得到二元方程组；再以 x_1 为天元一，消去 x_2 得到 $F(x_1)=0$。其代数意义在于，将一个多元高次方程组通过逐次消元，化为三角形方程组而获得方程组的解。

第二步：两式。《大成算经》术文如下：

> 是起术之本，而定别前后，随假式之所得，各有限矣。乃得假式二条者，即用一件前后式，直起一等之真术；得三者，择卑级式乘数低位少者一条而用二件前式，以其余二条为两件后式，起二等之虚术；得四条者，如前择一条用三件前式，以其余三条为三件后式，起三等之虚术也[次第仿此]各视每式级长短与位多少，依旁书段数、正负之同异，验略、省、约、缩而整其式也〔1〕。

多元相消归根结蒂是二元相消，故谓之为"起术之本"。根据第一条"真虚"得到多元高次方程组：

$$
\begin{cases}
F_1(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)=0 \\
F_2(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)=0 \\
\cdots\quad\cdots\quad\cdots \\
F_n(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)=0
\end{cases}
\qquad (EQN-F)
$$

当以 x_n 为主变元进行相消时，从 $(EQN-F)$ 中选取一个 $F_r(x_1, x_2, \cdots, x_n)=0$（前式）与其余 $n-1$ 个方程（后式）分别组成二元方程组：

$$
\begin{cases}
F_r(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)=A_0+A_1x_n+A_2x_n^2+\cdots+A_p x_n^p=0 \\
F_k(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)=B_0+B_1x_n+B_2x_n^2+\cdots+B_q x_n^q=0
\end{cases}
$$

$$(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n;\ k\neq r)\ (※)$$

以消去 x_n。由 $(EQN-F)$ 构造（※）式便称作"两式"。为使消元后方程次数尽量降低而且消元变换次数较少，建部贤弘在这里规定：

$$\deg(F_r)=\min\{\deg(F_i)\}\ (i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$$

---

〔1〕 関孝和，建部賢明，建部賢弘編集. 大成算經[M]. 卷十七. 写本. 東北大学図書館狩野文庫藏. 登録号：ws006478，索書号：7.20820.20.

即所谓的“择卑级式乘数低位少者”。

“两式”为消元作准备，因此在消元前，对前、后两式进行一系列同解变换，使两方程达到两方面要求：① 次数尽量降低，② 系数尽量简单。其变换包括所谓的“略”、“省”、“约”、“缩”四类代数运算。

所谓“略”，按关孝和的话说，即“高级式中位与卑级式同名者略之”。如

后式		前式			后式		前式
-1 辰		-2 辰	-1 子		-1 辰	-1 辰	-1 子
2 巳	1 辰	2 巳	1 丑	略之为	2 巳		1 丑
1 午	-2 巳	1 午	-1 寅		1 午		-1 寅
		-1 午	1 卯				1 卯

实际包含以下几类方程同解变换：

$$(1)\begin{cases}f(x)=0\\g(x)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(x)\pm g(x)=0\\g(x)=0\end{cases}$$

$$(2)\begin{cases}f(x)=0\\g(x)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(x)-x^n g(x)=0\\g(x)=0\end{cases}$$

$$(3)\begin{cases}f(x)=0\\g(x)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(x)-[g(x)]^n=0\\g(x)=0\end{cases}$$

“省”，即省略旁书文字符号（即约去文字系数）；“约”，即约去段数（常系数）。两者属同一类变换。

第三步：定乘（附叠、括）。

对于两式

$$\begin{cases}F_1(x,\ y)=A_0+A_1y+A_2y^2+\cdots+A_n y^n=0 & (1)\\F_2(x,\ y)=B_0+B_1y+B_2y^2+\cdots+B_m y^m=0 & (2)\end{cases}\qquad(\#)$$

（其中 $A_i=f_i(x)$，$B_i=g_i(x)$）

消去 y 得到 $F(A_i,\ B_i)=f(x)=0$，确定 $\deg(f(x))$ 的方法叫定乘。

关孝和以具体的例题来说明他的定乘方法，形式如下：

前式　平方　平｜立｜归

后式　立方　三｜立｜归｜平

前式再自乘　顺行　五—七—八—八—六—四—立

同级相乘　九—十—十三—十四—十二—十一—十

后式自乘　逆行　三—立—四—五—五—六—七

以十四乘方为真术之乘数

关孝和定乘方法可概括为下列一般化形式：

若 $[m, n] = t$，且 $t = pm = qn$，对方程(1)与(2)分别作 q，p 次乘方，得两个 t 次方程：

$$\begin{cases} C_0 + C_1 y + C_2 y^2 + \cdots + C_t y^t = 0 \\ D_0 + D_1 y + D_2 y^2 + \cdots + D_t y^t = 0 \end{cases}$$

消去 y 后，得到一元方程 $G(C_i, D_j) = f(x) = 0$，则

$$\deg(f(x)) = \max\{\deg(C_i) + \deg(D_{t-i})\}\ (i = 0, 1, 2, 3, \cdots, t)。$$

《大成算经》述之为

每件虚术之乘数从末到初，每起虚术如此，定真术之乘数也[1]。

即是说，对于 n 元方程组($EQN-F$)，通过一系列上述定乘，最终获得一元方程的次数。不难验证，关孝和的定乘方法是错误的。我们知道，每消去一个未知数，其余未知数的次数必然升高，消元过程中确定消元结果的方程次数是一个十分复杂的数学问题。和算家这方面的尝试是失败的。

“定乘”一节还附有“叠”与“括”的变换。所谓“叠”者，就是对

$$\begin{cases} F_1(x, y) = A_0 + A_1 y + A_2 y^2 + \cdots + A_n y^n = 0 & (1) \\ F_2(x, y) = B_0 + B_1 y + B_2 y^2 + \cdots + B_m y^m = 0 & (2) \end{cases}$$

〔1〕 関孝和，建部賢明，建部賢弘編集. 大成算經[M]. 卷十七. 写本. 東北大学図書館狩野文庫藏. 登録号：ws006478，索書号：7.20820.20.

实施降次变换，依次消去 y^n，y^{n-1}，…，y^2，y 项，叫叠高级；反之，依次消去常数项，y，y^2，…，y^{n-1}，y^n项，叫叠低级。对天元式来说，两者效果是一样的。和算家的"叠"法，乃采用互乘相消，其目的不外乎二：一是叠到最后，达到消元的目的；二是对二元方程组通过一系列"叠"的变换，得到 p 个 $p-1$ 次方程，从而系数构成一个 p 阶行列式，以行列式算法消元，于是形成下面的"生尅"算法。

所谓"括"者，指将多元方程 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)=0$ 以 x_k 为主变元，利用旁书整理成 $f(x_k)=\sum_{i=0}^{n} A_i x_k^i=0$。这是消元前的准备，理应在"叠"之前。

第四步：换式（附芟、治）。

《大成算经》叙述"换式"（图 3.7）的方法如下：

> 每件两式各验定乘及叠、括而后，以前式下级遍乘后式，以后式下级遍乘前式，依正负加减之得一式；又以前式下第二级遍乘后式，以后式下第二级遍乘前式，依正负各加减于一式，得二式；复如前递以下第三级遍乘前后式，各加减于二式，得三式，逐此到上第二级为限，而得换诸式。若两式级数不均者，叠之，增乘数则借空于卑级式下，而求换式，各视其旁书段数而验芟、治也〔1〕。

图 3.7　《大成算经》卷十七"全题解"之"解伏题"中的"换式"

---

〔1〕 関孝和，建部賢明，建部賢弘編集. 大成算經[M]. 卷十七. 写本. 東北大学図書館狩野文庫藏. 登録号：ws006478，索書号：7. 20820. 20.

对于“两式”(♯)，通过“叠”得到齐次方程组

$$\begin{cases} U_1(y) = S_0 + S_1 y + S_2 y^2 + \cdots + S_k y^k = 0 \\ U_2(y) = T_0 + T_1 y + T_2 y^2 + \cdots + T_k y^k = 0 \end{cases}$$

对它实施迭代演算：

$$\begin{cases} U_1(y)T_k - U_2(y)S_k = P_1(y) = 0 \\ [U_1(y)T_i - U_2(y)S_i] - yP_{k-i}(y) = P_{k-i+1}(y) = 0 \end{cases}$$
$$(i = k-1,\ k-2,\ \cdots,\ 2,\ 1)$$

得到同解的 $k-1$ 次齐次方程组

$$\begin{cases} P_1(y) = A_{1,0} + A_{1,1}y + A_{1,2}y^2 + \cdots + A_{1,k-1}y^{k-1} = 0 \\ P_2(y) = A_{2,0} + A_{2,1}y + A_{2,2}y^2 + \cdots + A_{2,k-1}y^{k-1} = 0 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ P_k(y) = A_{k,0} + A_{k,1}y + A_{k,2}y^2 + \cdots + A_{k,k-1}y^{k-1} = 0 \end{cases} \tag{EQN - P}$$

“两式”(♯)的终结式就是方程组($EQN-P$)的终结式，而方程组($EQN-P$)的终结式就是该方程组系数行列式展开的结果。将“两式”(♯)通过上述的迭代演算化为方程组($EQN-P$)，便完成了“换式”，其目的在于构造一个 k 阶行列式。

所谓芟、治，指约去($EQN-P$)中某一方程系数的公因子，或约去($EQN-P$)中某 y^r 项所有系数中的公因子。当公因子是常数时叫治，否则叫芟。芟与治，实质上是对行列式约去某行(列)公因子的初等变换，为以下行列式展开计算做简化工作。

第五步：生尅(附交式、斜乘)。

获得 $k-1$ 次换式方程组($EQN-P$)后，系数构成一个 k 阶行列式，行列式展开的结果亦就是($EQN-P$)消元的结果。和算行列式算法的这一背景与西方行列式理论的线性方程组消元背景异趣旨。

关孝和采用 Leibniz 展开方式，即通过交式(交换行列式列序号)与斜乘(对角线法则)两个步骤，把三阶行列式的 Sarrus 展开法(1846)推广到高阶行列式展开场合。对于三阶以上行列式，仅以斜乘并不能获得展开式全部

项，必须交换行列式的列（行），再行斜乘。关孝和的“交式”就是给出从低阶行列式行序交换法生成出高阶行列式的行序交换法（阿拉伯数码表示行列式之列序号），即

> 从换三式，起换四式，从换四式，起换五式。逐如此［换二式、换三式者，不及交式也］，顺逆共递添一得次，乃式数奇者，皆顺偶者，顺逆相交也。

三阶	四阶		五阶	
③②①	③②①	④③②①	②④③①	③②④①
（共一种）⇒	④③②①	⑤④③②①	③⑤④②①	④③⑤②①
	②④③①⇒	②⑤④③①	④②⑤③①	⑤④②③①
	③②④①	③②⑤④①	⑤③②④①	②⑤③④①
	（共三种）	④③②⑤①	②④③⑤①	③②④⑤①
			（共十二种）	

这种生成方式并不正确，松永良弼曾著《解伏题交式斜乘之谚解》（1715）予以纠正。

斜乘，即对角线法则：

> 交式各布之，从左右斜乘而得生克也［若当空级者除之］。换式数奇者，以左斜乘为生，以右斜乘为克；偶者，左斜乘、右斜乘共生克相交也[1]。

对于行列式 $|A_{i,j}| = \sum \pm A_{1,t_1} A_{2,t_2} \cdots A_{n,t_n}$，$\pm$ 号的选择与排列 $\tau(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ 的奇偶性有关。关孝和把副对角线上元素相乘称作生，即正项，把主对角线上元素相乘称作尅，即负项，其正负号与今天我们习惯的行列式展开各项的正负号正好相反。

第六步：寄消。将行列式展开的正数项作为被减数（称作寄位），把负数项作为减数（称作相消数），进行合并，获得一元方程（开方式）。

通过上述六个步骤，可以消去一元变量，反复利用上述消元过程，可逐步消去各个未知元。在消元理论中，多元高次方程组消元远难于线性方程组的消元。即使在现代，高次联立方程组求解无论在理论上还是在技术上都并不成熟[2]。

---

〔1〕 松永良弼．平山諦，内藤淳編．松永良弼[M]，松永良弼刊行会．東京：東京法令出版株式会社，1987：33.

〔2〕 吴文俊．吴文俊论数学机械化[M]，济南：山东教育出版社，1996：492.

关孝和解伏题之消元法十分完整，可以简洁地归纳为如下算法程序：

第一步：通过所谓的“括”进行析分主变元。对 n 元方程组($EQN-F$)，以 x_n 为主变元，“括”成

$$\begin{cases} G_1(x_n)=0 \\ G_2(x_n)=0 \\ \cdots \quad \cdots \\ G_n(x_n)=0 \end{cases} \qquad (EQN-G)$$

其中：系数 $A_{i,j}=P_{i,j}(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})$。

第二步，进行“换式”。从($EQN-G$)中选择 $\deg(G_r(x_n))=\min\{\deg(G_i(x_n))\}$ 的 $G_r(x_n)$ 与其余各 $G_i(x_n)$ ($i\neq r$) 分别构成“两式”(共 $n-1$ 个)，对每组两式进行换式变换的消元演算，得到 k 个方程联立的方程组($EQN-P$)。

第三步：进行“生尅”演算，即对($EQN-P$)的系数行列式展开，消去 x_n。

从 $n-1$ 组“两式”中得到 $n-1$ 个“生尅”方程，联立为 $n-1$ 元方程组，再回到第一步，重复上述消元过程以逐次消去 $x_n, x_{n-1}, \cdots, x_3, x_2$，得到三角阵方程组

$$\begin{cases} E_1(x_1)=0 \\ E_2(x_1, x_2)=0 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ E_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)=0 \end{cases} \qquad (EQN-E)$$

在和算消元理论中，“定乘”是多余的，“叠”与“换式变换”是等效的。除此之外，则是按上述程式消元的，具有机械性，可以利用计算机进行处理。

伏题的数学问题都来源于实际，构造的方程组($EQN-F$)总是有确定的实数解。因此，和算家不考虑高次联立方程组的解的结构与性质，这是和算消元理论的缺陷。

对于朱世杰四元相消的位置代数局限性，国内数学史界都有共识。至于四元何以相消，清末以来，众说纷纭，莫衷一是。我们不妨借鉴和算家解伏题方法来研究朱世杰消元法，由此复原四元相消很有可能。

和算消元法之“括”与“生尅”是由旁书法实现的，这一点，四元式是无法实现的，但无论何种方式消元，析分主变元与消元变换则是基本要求。朱世杰的四元相消中必定也包含类似“括”的析分主变元方法，可能就是朱世杰所谓的“剔”。关孝和消元变换虽有“叠”与“换式”之分，但均以互乘相消为基础，实际是古代“方程术”之消元法在高次方程组上的应用。由此可见，“互乘相消”是古代消元的基本程式，朱世杰的“内二行”、“外二行”相消，以及“互隐通分”应均是互乘相消。对朱世杰消元法的任何脱离“互乘相消”的解释，都是不合历史实际的。

消元过程中，为使方程系数尽量简单以及项数减少，需作一系列同解变换，和算家设计了“略”、“省”、“约”、“缩”、“芟”、“治”等多种变换。对有限空间上的四元式来说，更需要这类同解变换，清末以来，人们对四元相消过程的复原都不能尽善尽美，主要是由于不知道朱世杰在消元过程中作了哪些同解变换。选择不同的同解变换，会直接影响消元的结果，这是复原四元消法的困难之所在。

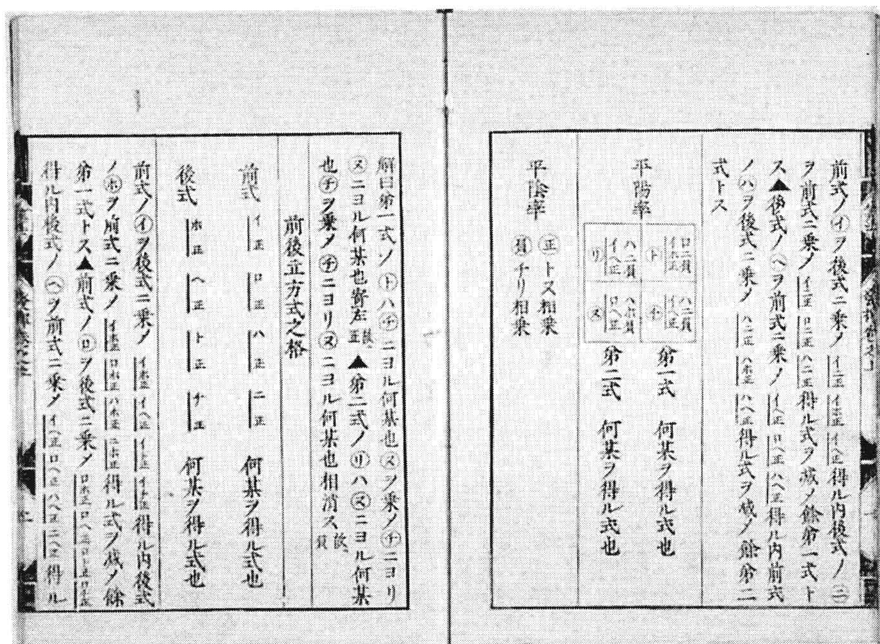
3.4 和算家对行列式展开法的改进

行列式展开法的成果是和算消元法研究的副产品，由于关孝和“交式、斜乘”展开方式并不科学，导致后来的和算家探索科学的展开法。建部兄弟可能意识到关氏展开法的缺陷，在《大成算经》中改用由低阶展开式生成高阶展开式的展开方法，实际上等价于利用余子式展开的 Vandermonde 展开法。元禄三年(1690)井关知辰(Izeki Tomotoki，生卒年不详)著《算法发挥》(图 3.8)，也采用 Vandermonde 展开法。其后，久留岛义太创立了采用共轭行列式展开的拉普拉斯展开法。这些成就都早于欧洲。

《算法发挥》是世界数学史第一本关于行列式展开研究的出版物，在西方，关于行列式的最初出版物是 1750 年 Cramer(1704～1752)的 *Introduction à l'analyse des ligues courbes algébriques*(Genève，1750)，A. T. Vandermonde(1735～1796)创制 Vandermonde 展开法的时间是 1772 年，比《算法发挥》要晚[1]。《算法发挥》由上、中、下三卷构成，内容十分简约。

---

〔1〕 日本学士院编. 明治前日本数学史[M]. 第三卷. 新訂版. 東京：野間科学医学資料館，1979：379.


前式ノ㋑ヲ後式ニ乗ノ……得ル内後式ノ……ヲ前式ニ乗ノ……得ル式ヲ減ノ餘弟一式トス▲後式ノ㋬ヲ前式ニ乗ノ……得ル内前式ノ㋩ヲ後式ニ乗ノ……得ル式ヲ減ノ餘弟二式トス

平陽率

弟一式　何某ヲ得ル式也

弟二式　何某ヲ得ル式也

平陰率

……トス相乗

……ナリ相乗

解曰弟一式ノ㋣ハ㋠ニヨル何某也㋦ヲ乗ノ㋠ニヨリ㋦ニヨル何某也……▲弟二式ノ㋷ハ㋦ニヨル何某也㋠ヲ乗ノ㋠ニヨリ㋦ニヨル何某也相消ス……

前後立方式之格

前式　……　何某ヲ得ル式也

後式　……　何某ヲ得ル式也

前式ノ㋑ヲ後式ニ乗ノ……得ル内後式ノ㋭ヲ前式ニ乗ノ……得ル式ヲ減ノ餘弟一式トス▲前式ノ㋺ヲ後式ニ乗ノ……得ル内後式ノ㋬ヲ前式ニ乗ノ……得ル

图 3.8　井关知辰的《算法发挥》(1690)

卷上，主要介绍如何由两个 n 次方程(前式与后式)联立进行消元。首先通过一系列的互乘相消的代数演算，把它变成一个同解的 n 次齐次方程组，由此方程组系数构成一个 n 阶行列式(阳率)，对这个行列式利用余子式按第一列元素进行展开，其终结式就是消元的结果(阴率)。如

前式　$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3=0$　①

后式　$b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3=0$　②

[②$\times a_0-$①$\times b_0$]，约去 x，得

第一式：$(a_0b_1-b_0a_1)+(a_0b_2-b_0a_2)x+(a_0b_3-b_0a_3)x^2=0$　③

[②$\times a_1-$①$\times b_1$]+③，约去 x，得

第二式：$(a_0b_2-b_0a_2)+[(a_0b_3-b_0a_3)+(a_1b_2-b_1a_2)]x+(a_1b_3-b_1a_3)x^2=0$　④

[②$\times a_3-$①$\times b_3$]，得

第三式：$(a_0b_3-b_0a_3)+(a_1b_3-b_1a_3)x+(a_2b_3-b_2a_3)x^2=0$　⑤

第一式、第二式与第三式是齐次方程，系数分别是

$A_1=a_0b_1-b_0a_1$，$A_2=a_0b_2-b_0a_2$，$A_3=a_0b_3-b_0a_3$，

$B_1 = a_0b_2 - b_0a_2$, $B_2 = (a_0b_3 - b_0a_3) + (a_1b_2 - b_1a_2)$, $B_3 = a_1b_3 - b_1a_3$,

$C_1 = a_0b_3 - b_0a_3$, $C_2 = a_1b_3 - b_1a_3$, $C_3 = a_2b_3 - b_2a_3$,

这些系数构成一个三阶行列式：

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0b_1 - b_0a_1 & a_0b_2 - b_0a_2 & a_0b_3 - b_0a_3 \\ a_0b_2 - b_0a_2 & (a_0b_3 - b_0a_3) + (a_1b_2 - b_1a_2) & a_1b_3 - b_1a_3 \\ a_0b_3 - b_0a_3 & a_1b_3 - b_1a_3 & a_2b_3 - b_2a_3 \end{vmatrix}$$

叫作“阳率”。这个行列式展开的结果为

$$A_1B_2C_3 + A_2B_3C_1 + A_3B_1C_2 - A_1B_3C_2 - A_2B_1C_3 - A_3B_2C_1 = 0$$

也即一式、二式、三式联立消去 x 的终结式，叫作“阴率”。

一般地，对于两个联立方程(前后 $n-1$ 乘式)

前式： $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = 0$ (1)

后式： $b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n = 0$ (2)

实施一系列互乘相消的演算：

$[(2)\times a_0 - (1)\times b_0]$，约去 x，得

一式：$A_{1,1} + A_{1,2}x + A_{1,3}x^2 + \cdots + A_{1,n}x^{n-1} = 0$ (3)

$[(2)\times a_1 - (1)\times b_1] + (3)$，约去 x，得

二式：$A_{2,1} + A_{2,2}x + A_{2,3}x^2 + \cdots + A_{2,n}x^{n-1} = 0$ (4)

$[(2)\times a_2 - (1)\times b_2] + (4)$，约去 x，得

三式：$A_{3,1} + A_{3,2}x + A_{3,3}x^2 + \cdots + A_{3,n}x^{n-1} = 0$ (5)

… …

$[(2)\times a_{k-1} - (1)\times b_{k-1}] + (k+1)$，约去 x，得

k 式：$A_{k,1} + A_{k,2}x + A_{k,3}x^2 + \cdots + A_{k,n}x^{n-1} = 0$ $(k+2)$

… …

$[(2)\times a_{n-2} - (1)\times b_{n-2}] + (n+1)$，约去 x，得

$n-1$ 式：$A_{n-1,1} + A_{n-1,2}x + A_{n-1,3}x^2 + \cdots + A_{n-1,n}x^{n-1} = 0$ $(n+1)$

$[(2)\times a_{n-1} - (1)\times b_{n-1}] + (n+1)$，约去 x，得

n 式：$A_{n,1} + A_{n,2}x + A_{n,3}x^2 + \cdots + A_{n,n}x^{n-1} = 0$ $(n+2)$

这 n 个齐次 $n-1$ 次方程联立，其系数构成一个 n 阶行列式

$$A = \begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,n-1} & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,n-1} & A_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \cdots & A_{n,n-1} & A_{n,n} \end{vmatrix}$$

这个行列式叫“阳率”，其展开的结果，即方程消元后的终结式，称作“阴率”。当 $n=2$ 时称作“平阳率”、“平阴率”；$n=3$ 时称作“立阳率”、“立阳率”；$n=4$ 时称作“三阳率”、“三阴率”；$n=5$ 时称作“四阳率”、“四阴率”，以此类推。

对于行列式 A 的展开，按照行列式第一列各元素 $A_{1,j}(j=1, 2, 3, \cdots, n)$ 的余子式进行展开，记 A 的第一列各元素 $A_{1,j}$ 对应的余子式为 $D_{1,j}$，则 $A=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}A_{1,j}D_{1,j}$（由 n 个图表示）。

《算法发挥》的内容与关流的“解伏题”相类，关孝和、建部贤弘等人编著的《大成算经》(1711)中也给出 Vandermonde 展开法。井关知辰的老师岛田尚政是大阪人，与田中由真是否有师承关系，不甚清楚，他们与关流数学家之间似乎有学术交往。

久留岛义太遗著《久氏遗稿》中的“天卷粹沙”部分，讨论了三阶至六阶行列式的展开问题。特别对五阶、六阶行列式，使用了后来人们所称的 Laplace 展开法(1776)。因为久留岛义太于宝历七年(1757)去世，所以，他的这项创造应该在 1757 年以前，即他的业绩在法国数学家 Laplace(1749～1827)之前。

“天卷粹沙”首先以一乘幂、再乘幂、三乘幂、四乘幂为题，从

① $a_0+a_1x=0$，$x^2=A$ （一乘幂）

② $a_0+a_1x+a_2x^2=0$，$x^3=A$ （再乘幂）

③ $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3=0$，$x^4=A$ （三乘幂）

④ $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4=0$，$x^5=A$ （四乘幂）

分别消去 x，获得各终结式。

然后讨论“立方两式”的消元结果，即从方程组

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 = 0 \\ b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 = 0 \end{cases}$$

中，消去 x 后获得终结式。

接下来依次讨论“平方三式”、“立方四式”、“三乘五式”和“四乘六式”的消元结果，也就是分别叙述三阶、四阶、五阶、六阶行列式展开的结果。

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = 0 \\ b_0 + b_1 x + b_2 x^2 = 0 \\ c_0 + c_1 x + c_2 x^2 = 0 \end{cases}$$ 称作“平方三式”；

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 = 0 \\ b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 = 0 \\ c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 = 0 \\ d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + d_3 x^3 = 0 \end{cases}$$ 称作“立方四式”，等等。

例如，对于“立方四式”：$\begin{vmatrix} \text{东} & \text{春} & \text{青} & \text{木} \\ \text{南} & \text{夏} & \text{赤} & \text{火} \\ \text{西} & \text{秋} & \text{白} & \text{金} \\ \text{北} & \text{冬} & \text{黑} & \text{水} \end{vmatrix}$

其四阶行列式的展开方式如下：

东夏内去南春㊀　东赤内去南青㊁　东火内去南木㊂　春赤内去夏青㊃

夏木内去南火㊄　青火内去赤木㊅　西冬内去北秋㊅　西黑内去北白㊄

西水内去北金㊃　秋黑内去冬白㊂　冬金内去秋水㊁　白水内去黑金㊀

一一相乘，二二相乘，三三相乘，四四相乘，五五相乘，六六相乘，相并分正负起本术。

所谓“东夏内去南春”即指$\begin{vmatrix} \text{东} & \text{春} \\ \text{南} & \text{夏} \end{vmatrix}$，“东赤内去南青”即指$\begin{vmatrix} \text{东} & \text{青} \\ \text{南} & \text{赤} \end{vmatrix}$，汉字数字即圆圈中数字，是子行列式的编号。如此等等，于是其展开结果为：

$$\begin{vmatrix} \text{东} & \text{春} & \text{青} & \text{木} \\ \text{南} & \text{夏} & \text{赤} & \text{火} \\ \text{西} & \text{秋} & \text{白} & \text{金} \\ \text{北} & \text{冬} & \text{黑} & \text{水} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{东} & \text{春} & \text{青} & \text{木} \\ \text{南} & \text{夏} & \text{赤} & \text{火} \\ \text{西} & \text{秋} & \text{白} & \text{金} \\ \text{北} & \text{冬} & \text{黑} & \text{水} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{东} & \text{春} \\ \text{南} & \text{夏} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \text{白} & \text{金} \\ \text{黑} & \text{水} \end{vmatrix} -$$

$$\begin{vmatrix} 东 & 青 \\ 南 & 赤 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 秋 & 金 \\ 冬 & 水 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 东 & 木 \\ 南 & 火 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 秋 & 白 \\ 冬 & 黑 \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} 春 & 青 \\ 夏 & 赤 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 西 & 金 \\ 北 & 水 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 春 & 木 \\ 夏 & 火 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 西 & 白 \\ 北 & 黑 \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} 青 & 木 \\ 赤 & 火 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 西 & 秋 \\ 北 & 冬 \end{vmatrix} = 0$$

对于“三乘五式”（五阶行列式）：

$$\begin{vmatrix} A & F & K & P & U \\ B & G & L & Q & V \\ C & H & M & R & W \\ D & I & N & S & X \\ E & J & O & T & Y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & F \\ B & G \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} M & R & W \\ N & S & X \\ O & T & Y \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A & K \\ B & L \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} H & R & W \\ I & S & X \\ J & T & Y \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} A & P \\ B & Q \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} H & M & W \\ I & N & X \\ J & O & Y \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A & U \\ B & V \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} H & M & R \\ I & N & S \\ J & O & T \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} F & K \\ G & L \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} C & R & W \\ D & S & X \\ E & T & Y \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} F & P \\ G & Q \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} C & M & W \\ D & N & X \\ E & O & Y \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} F & U \\ G & V \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} C & M & R \\ D & N & S \\ E & O & T \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} K & P \\ L & Q \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} C & H & W \\ D & I & X \\ E & J & Y \end{vmatrix} -$$

$$\begin{vmatrix} K & U \\ L & V \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} C & H & R \\ D & I & S \\ E & J & T \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} P & U \\ Q & V \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} C & H & M \\ D & I & N \\ E & J & O \end{vmatrix}$$

（原书中行列式元素用片假名“イ、ヘ、ル、タ、ナ”等标记，为书写方便，我们改用拉丁字母标记）

最后叙述“四乘六式”（六阶行列式）的展开：

$$
\begin{array}{cccccc}
\text{乾} & \text{兑} & \text{离} & \text{震} & \text{巽} & \text{坎} \\
\text{艮} & \text{坤} & \text{角} & \text{亢} & \text{氐} & \text{房} \\
\text{心} & \text{尾} & \text{箕} & \text{斗} & \text{牛} & \text{女} \\
\text{虚} & \text{危} & \text{室} & \text{壁} & \text{奎} & \text{娄} \\
\text{胃} & \text{昴} & \text{毕} & \text{觜} & \text{参} & \text{井} \\
\text{鬼} & \text{柳} & \text{星} & \text{张} & \text{翼} & \text{轸}
\end{array}
$$

展开结果为

$$
\begin{vmatrix}
\text{乾} & \text{兑} & \text{离} & \text{震} & \text{巽} & \text{坎} \\
\text{艮} & \text{坤} & \text{角} & \text{亢} & \text{氐} & \text{房} \\
\text{心} & \text{尾} & \text{箕} & \text{斗} & \text{牛} & \text{女} \\
\text{虚} & \text{危} & \text{室} & \text{壁} & \text{奎} & \text{娄} \\
\text{胃} & \text{昴} & \text{毕} & \text{觜} & \text{参} & \text{井} \\
\text{鬼} & \text{柳} & \text{星} & \text{张} & \text{翼} & \text{轸}
\end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix}
a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 & f_1 \\
a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 & f_2 \\
a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 & f_3 \\
a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & e_4 & f_4 \\
a_5 & b_5 & c_5 & d_5 & e_5 & f_5 \\
a_6 & b_6 & c_6 & d_6 & e_6 & f_6
\end{vmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
=&-\overset{\textcircled{1}}{|a_1b_2c_3|}\cdot\overset{\textcircled{1}}{|d_4e_5f_6|}+\overset{\textcircled{2}}{|a_1b_2d_3|}\cdot\overset{\textcircled{2}}{|c_4e_5f_6|}-\overset{\textcircled{3}}{|a_1b_2e_3|}\cdot\overset{\textcircled{3}}{|c_4d_5f_6|}+\\
&\overset{\textcircled{4}}{|a_1b_2f_3|}\cdot\overset{\textcircled{4}}{|c_4d_5e_6|}-\overset{\textcircled{5}}{|a_1c_2d_3|}\cdot\overset{\textcircled{5}}{|b_4e_5f_6|}+\overset{\textcircled{6}}{|a_1c_2e_3|}\cdot\overset{\textcircled{6}}{|b_4d_5f_6|}-\\
&\overset{\textcircled{7}}{|a_1c_2f_3|}\cdot\overset{\textcircled{7}}{|b_4d_5e_6|}-\overset{\textcircled{8}}{|a_1d_2e_3|}\cdot\overset{\textcircled{8}}{|b_4e_5f_6|}-\overset{\textcircled{9}}{|a_1d_2f_3|}\cdot\overset{\textcircled{9}}{|b_4c_5e_6|}-\\
&\overset{\textcircled{10}}{|a_1e_2f_3|}\cdot\overset{\textcircled{10}}{|b_4c_5d_6|}+\overset{\textcircled{11}}{|b_1c_2d_3|}\cdot\overset{\textcircled{11}}{|a_4e_5f_6|}-\overset{\textcircled{12}}{|b_1c_2e_3|}\cdot\overset{\textcircled{12}}{|a_4d_5f_6|}+\\
&\overset{\textcircled{13}}{|b_1c_2f_3|}\cdot\overset{\textcircled{13}}{|a_4d_5e_6|}+\overset{\textcircled{14}}{|b_1d_2e_3|}\cdot\overset{\textcircled{14}}{|a_4c_5f_6|}-\overset{\textcircled{15}}{|b_1d_2f_3|}\cdot\overset{\textcircled{15}}{|a_4c_5e_6|}+\\
&\overset{\textcircled{16}}{|b_1e_2f_3|}\cdot\overset{\textcircled{16}}{|a_4c_5d_6|}-\overset{\textcircled{17}}{|c_1d_2e_3|}\cdot\overset{\textcircled{17}}{|a_4b_5f_6|}+\overset{\textcircled{18}}{|c_1d_2f_3|}\cdot\overset{\textcircled{18}}{|a_4b_5e_6|}-\\
&\overset{\textcircled{19}}{|c_1e_2f_3|}\cdot\overset{\textcircled{19}}{|a_4b_5d_6|}+\overset{\textcircled{20}}{|d_1e_2f_3|}\cdot\overset{\textcircled{20}}{|a_4b_5c_6|}
\end{aligned}
$$

在上述展开式中，$|a_i b_{i+1} c_{i+2}|$ 之类表示小行列式。和我们今天的展开式相比，除第九项外，其余项的符号都是相反的，可能是他在对关于 $|b_4 c_5 d_6|$ 的展开中出现了疏忽。

这种对行列式进行分块，构造低阶小行列式再行展开的方法，即西方所谓的

Laplace 展开法。久留岛义太没有使用子行列式标记，后来菅野元健(Sugano Mototake，生卒年不详)在这方面推进了一步，更接近于 Laplace 展开法。

3.5 吴方法与和式几何研究

3.5.1 吴方法与 Gröbner 基方法

自古至今，解方程组是数学研究的中心课题之一，解线性方程组已有《九章算术》方程术(高斯消去法)的机械化算法，而对于非线性代数方程组的求解，至今尚无标准的算法程序，随着计算机在数学研究中的广泛应用，探讨非线性方程组求解的计算理论和实践，成为计算代数与几何定理机器证明领域中的基本问题。这些领域目前比较流行的算法是吴方法和 Gröbner 基方法。

吴文俊-Ritt 方法，是 1977 年中国数学家吴文俊利用 20 世纪 30 年代 J. F. Ritt的理论而创立的多项式方程组的消元算法，被广泛地应用于初等几何的机器证明[1][2][3]。

该方法首先将一般的初等几何定理的假设条件表示为多元多项式方程组 ($k=r+s$ 维仿射空间代数簇)：

$$\begin{cases} p_1(u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_r,\ x_1,\ \cdots,\ x_s)=0 \\ p_2(u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_r,\ x_1,\ \cdots,\ x_s)=0 \\ \quad\cdots\ \cdots \qquad \cdots\ \cdots \\ p_s(u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_r,\ x_1,\ \cdots,\ x_s)=0 \end{cases}$$

其中：$u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_r$是独立的参变量，$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_s$不是独立的变量。

定理的结论表示为

$$g(u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_r,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_s)=0$$

再将方程组进行整序，化成三角形方程组：

---

〔1〕 王东明. 消去法及其应用[M]. 北京：科学出版社，2002.
〔2〕 严佟然，李晓霞. Gröbner 基方法与吴方法在平面几何定理机器证明中的应用与比较[J]. 海南大学学报(自然科学版)，2004，22 (2)：111－115.
〔3〕 梁肇军. 初等几何定理机器——吴方法简介[J]. 数学通讯，2001(11)：1－2.

$$\begin{cases} f_1(u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_r,\ x_1) = 0 \\ f_2(u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_r,\ x_1,\ x_2) = 0 \\ \quad \cdots\ \cdots \\ f_s(u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_r,\ x_1,\ \cdots,\ x_s) = 0 \end{cases}$$

然后用计算机去求 g 与 f_s两个多项式的除法所得的余式(也是一个多项式) R_s，再除以 f_{s-1}，又得余式 R_{s-1}，如此继续下去，直到最后的余式 R_1，如果 $R_1 = 0$，则定理得证。

Grönber 基概念是日本数学家广中平佑(Hironaka Heisuke，1931～)于 1964 年提出的，1965 年 Buchberger 深入研究了 Gröbner 基的性质，并给出了 Gröbner 基的算法及其改进算法。应用多项式理想的 Gröbner 基所属判定理来处理非线性方程组消元问题十分有效，它在计算代数、计算代数几何、计算代数数论等分支领域有着广泛的应用。

若定理的假设条件为

$$\begin{cases} f_1(u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_m,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n) = 0 \\ f_2(u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_m,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n) = 0 \\ \quad \cdots\ \cdots \\ f_i(u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_m,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n) = 0 \end{cases}$$

定理的结论为 $g(u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_m,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n) = 0$。

若使 $g^s = h_1 f_1 + h_2 f_2 + \cdots + h_i f_i$ 的 $h_1,\ h_2,\ \cdots,\ h_i$ 存在，则结论 g 由假定的集合 $f_1,\ f_2,\ \cdots,\ f_i$ 导出。

Gröbner 基方法证明几何定理的理论依据为以下根基所属判定定理[1][2]：

定理 1 多项式理想 $I = \langle f_1,\ \cdots,\ f_i \rangle \subset Q(u_1,\ \cdots,\ u_m)[x_1,\ \cdots,\ x_n]$，$I$ 的任意顺序的 Gröbner 基是 G_r，此时，若 $g \xrightarrow{G_r} 0$，则由 $g \in I$，证明成功；若 $g \not\xrightarrow{G_r} 0$，则需要检查 $g^s \in I$ (在几何定理中，几乎在所有场合，$s = 1$)。

〔1〕 赵雪芝. 平面几何命题机器证明的 Gröbner 基方法[J]. 科学技术与工程，2006，6(21)：491－3493.

〔2〕 荒井千里，森継修一. 古今算法記遺題の数値解について[A]. 数学史の研究[C]. 京都大学数理解析研究所講究録 1568，2007：7－93.

定理 2　若 $g \in \sqrt{I}$，则 $I = \langle f_1, \cdots, f_i, 1 - yg \rangle \subset Q(u_1, \cdots, u_m)[x_1, \cdots, x_n, y]$，$I$ 的简约 Gröbner 基底为{1}，则定理获得证明。

定理 3　$I = \langle f_1, \cdots, f_i, g - y \rangle$，$I$ 的 $\{x_1, \cdots, x_n\} \overset{\text{lex}}{>} y$ 顺序的 Gröbner 基底由 $\{\varphi(x_i, y), \cdots, y^s\}$ 证明。

利用 Gröbner 基性质和算法进行几何定理的机器证明的算法如下：

首先把几何命题化为代数形式，也就是先将假设表示为

$$f_i(u_1, u_2, \cdots, u_m, x_1, \cdots, x_n) = 0 \ (i = 1, 2, \cdots, n)$$

的形式，结论表示为

$$g \ (u_1, u_2, \cdots, u_m, x_1, \cdots, x_n) = 0,$$

然后计算理想 $I = \langle f_1, f_2, \cdots, f_i, 1 - y f \ \rangle$ 的辞典顺序的 Gröbner 基，简记为 G，若 G 为 1，即仅含常数项——关于 u_i 的多项式，则命题为真；否则，命题不真。

对于方程求解问题，则求主变元的多项式方程，然后利用求高次方程数值解。

当变元数目不多并且方程次数不高的情况下，使用 Gröbner 基方法解决初等几何问题比较有效，当变量次数较高的场合，使用 Gröbner 基方法由于中间项次数急剧膨胀而会增加计算的复杂程度，不如使用吴方法较好[1]。

3.5.2　应用计算机研究和算问题之实例

解伏题方法处理和式几何问题，本质上与吴方法及 Gröbner 基方法证明几何定理是一致的。近年来，随着计算代数研究的兴起，利用数学软件实践非线性方程组消元理论的研究很多，在日本计算数学界出现了应用计算机检验和算问题的研究，兹举两例。

实例一：对《古今算法》遗题解答的验证及对“六斜术”的机器证明。

关孝和的《发微算法》解答《古今算法记》的 15 个遗题，对于前 14 个几何问题，他使用天元术通过代数演算归结为求一元高次方程求数值解问题，这

---

〔1〕 赵雪芝. 平面几何命题机器证明的 Gröbner 基方法[J]. 科学技术与工程，2006，6(21)：491－3493.

些方程的次数依次是6次、9次、27次、108次、9次、18次、36次、18次、6次、10次、10次、54次、72次、1 458次、16次。特别是第14问：

今有两平锥，只云列甲、乙、丙、丁、戊、己寸各别别再自乘之，各其差云则者，从甲数而乙数者，少寸立积二百七十一坪[1]，从乙数而丙数者，少寸立积二百十七坪，从丙数而丁数者，少寸立积六十坪零八分，从丁数而戊数者，少寸立积三百二十六坪二分，从戊数而己数者，少寸立积六十一坪。问甲、乙、丙、丁、戊、己几何？[2]

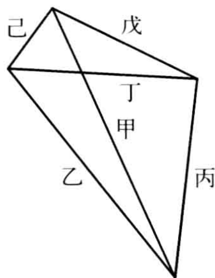


图3.9　《古今算法记》第14问图

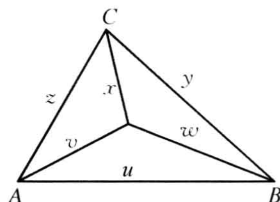


图3.10　六斜术之图

如图3.9，设甲斜$=x$，乙斜$=y$，丙斜$=z$，丁斜$=u$，戊斜$=v$，己斜$=w$，根据已知条件，可列出以下方程组

$$\begin{cases} f_1 = x^3 - y^3 - 271 = 0 & (1) \\ f_2 = y^3 - z^3 - 217 = 0 & (2) \\ f_3 = z^3 - u^3 - 60.8 = 0 & (3) \\ f_4 = u^3 - v^3 - 326.2 = 0 & (4) \\ f_5 = v^3 - w^3 - 61 = 0 & (5) \end{cases}$$

又根据关孝和的“六斜术”得方程

$$\begin{aligned} f_6 = {} & u^2x^4 + [(-u^2 - v^2 + w^2)y^2 + (-u^2 + v^2 - w^2)z^2 + u^4 + (-v^2 - \\ & w^2)u^2]x^2 + v^2y^4 + [(u^2 - v^2 - w^2)z^2 - u^2v^2 + v^4 - w^2v^2]y^2 + \\ & w^2z^4 + (-w^2u^2 - w^2v^2 + w^4)z^2 + w^2v^2u^2 = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

---

[1] 坪，日本的土地面积单位，三十六平方尺的面积为一坪。又作土石方之体积单位，六尺见方的正方体体积为一坪。这里用作体积单位。

[2] 沢口一之. 古今算法記[M]. 京極第五橋書林刊. 寛文十一年(1671). 東北大学図書館岡本文庫藏. 登録号：ws004636，索書号：035.

关孝和所给结果是关于 x 的 1 458 次方程，但没有给出详细的演算过程，今日手工进行数值计算来验证近乎不可能。

所谓“六斜术”，如图 3.10 所示，三角形 ABC 内一点与三顶点的连线及三角形三边，存在方程(6)的代数关系(图 3.9 是空间情形)。这个几何命题最初出现于关孝和的《发微算法》，后世和算家经常应用这个命题，而且对于立体情形的四面体也适用〔1〕。关孝和并没有说明这个关系式是如何推导出来的，今证明其真伪也非易事。

木村欣司、平野照比古、横山和弘〔2〕、荒井千里、森继修一〔3〕等人根据吴方法和 Gröbner 基方法，利用计算机验证了《发微算法》中 14 个几何问题的解答，并且用计算机证明了关孝和的六斜术。其解法步骤如下：

步骤一：给定边长、面积、体积等变量，以其中一个为主变量。主变量是“天元”。

步骤二：将由各变量关系所得的条件转换成多项式方程组：f_1，…，f_l。此时，u_i 是常数，是题目中预先给定的值，x_j 是未知数。

$$f_1(x_1,\ \cdots,\ x_n) = u_1$$

$$\cdots\quad\cdots$$

$$f_l(x_1,\ \cdots,\ x_n) = u_l$$

步骤三：由联立代数方程组计算 Gröbner 基，求主变量(天元)的一个变量多项式。

步骤四：由一个变量多项式，求关于主变量的数值解。由此值顺次求其他变量的数值解。其中，数值解得到负值或其值不符合图形时则舍去。

通过计算，不仅验证了关孝和解答的结果正确，而且还发现了第 4 问、第 12 问存在其他的解，而这一点，泽口一之与关孝和都没有意识到。用计算机成功证明关孝和的六斜术表明，和算中大量的几何命题都是可以机器证明的。

---

〔1〕 平山諦. 関孝和——その業績と伝記[M]. 東京：恒星社，1974.

〔2〕 木村欣司，平野照比古，横山和弘. 関孝和の問題を解く[J]. 日本数式処理学会誌，2005，11(3-4)：35-42.

〔3〕 荒井千里，森継修一. 古今算法記遺題の数値解について[A]. 数学史の研究[C]. 京都大学数理解析研究所講究録 1568，2007：87-93.

实例二：对《大成算经》卷十九“伏题”演段的验证。

《大成算经》卷十九给出若干解伏题演段的实例，其最后一题如下：

假如有甲、乙、丙、丁直各一，甲云：乙、丙、丁积加入甲阔，共五十寸；乙云：甲、丙、丁积加入乙阔，共六十七寸；丙云：甲、乙、丁积加入丙阔，共八十七寸；丁云：甲、乙、丙积加入丁阔，共九十三寸；戊云：乙、丙、丁阔与甲长和一尺七寸；己云：甲、丙、丁阔与乙长和一尺六寸；庚云：甲、乙、丁阔与丙长和一尺五寸；辛云：甲、乙、丙阔与丁长和一尺四寸。问甲、乙、丙、丁长阔〔1〕。

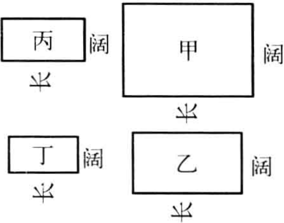


图 3.11

如图 3.11，设甲长$=q$，甲阔$=p$，乙长$=s$，乙阔$=r$，丙长$=u$，丙阔$=t$，丁长$=w$，丁阔$=v$，根据已知条件，本题可归结为以下方程组：

$$\begin{cases} f_1 = rs + tu + vw + p - a = 0 \\ f_2 = pq + tu + vw + r - b = 0 \\ f_3 = pq + rs + vw + t - c = 0 \\ f_4 = pq + rs + tu + v - d = 0 \\ f_5 = r + t + v + q - e = 0 \\ f_6 = p + t + v + s - f = 0 \\ f_7 = p + r + v + u - g = 0 \\ f_8 = p + r + t + w - h = 0 \end{cases}$$

求变量 p, q, r, s, t, u, v, w，其中 a, b, c, d, e, f, g, h 是常数。

在《大成算经》中，逐一消去变量，得到一个关于未知数 p 的 50 次方程，其演段过程十分冗长，竟达 40 页。如果要手工计算验证其消元结果，则需要莫大的耐心。

近年，日本学者野吕正行以此题为例，利用 Gröbner 基联立方程式消元法的一般理论和算法以检验《大成算经》中的解伏题算法的结果〔2〕。其算

〔1〕 関孝和，建部賢明. 建部賢弘編集. 大成算經[M]. 卷十九. 写本. 東北大学図書館狩野文庫藏. 登録号：ws006478，索書号：7. 20820. 20.

〔2〕 野吕正行. 連立代数方程式の消去の理論と実際[A]. 数学史の研究[C]. 京都大学数理解析研究所講究録 1444，2005：137.

法步骤如下：

步骤一：消去 w，u，s，v。

从 $f_i(i=1,2,\cdots,4)$，由 f_8消去 w,由 f_7消去 u,由 f_6消去 s,由 f_5消去 v,结果为$\widetilde{f}_i$，

$$\widetilde{f}_1 = 2t^2+(2q+2r-2e+g-h)t+(q-e+1)p+(2r-h)q+ \\ 2r^2+(-2e+f-h)r-a+he$$

$$\widetilde{f}_2 = 2t^2+(2q+2r-2e+g-h)t+(2q+r-e)p+(r-h)q+ \\ r^2+(-e-h+1)r-b+he$$

$$\widetilde{f}_3 = t^2+(p+q+2r-e-h+1)t+(2q-e)p+(2r-h)q+ \\ 2r^2+(-2e+f-h)r-c+he$$

$$\widetilde{f}_4 = t^2+(-p+q-e+g-1)t+(q-r)p+(r-1)q+r^2+ \\ (-e+f-1)r-d+e$$

步骤二：消去 t。

对于 $I=\langle\widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2, \widetilde{f}_3, \widetilde{f}_4\rangle$，$\{t\}\gg\{r, q, p, a, b, c, d, e, f, g, h\}$

并且设定后半变量中适用全次数逆辞典顺序,计算 Gröbner 基 G,即

$$G=\{g_1(p,q), g_2(p,q,r), \cdots, g_7(p,q,r), g_8(p,q,r,t), \cdots, \\ g_{16}(p,q,r,t)\} \quad (\text{省略 } a, \cdots, h),$$

于是

$$I\cap Q[p,q,r]=\langle g_1, g_2, \cdots, g_7\rangle$$

步骤三：消去 r。

计算 $h(p,q)=\text{Res}\ r(g_2(p,q,r), g_3(p,q,r))$

$g_2=3r^2+(3q-3p-3e+3f-3)r-q+p-a+2b-c-d+e$

步骤四：消去 q。

从 $g_1=(3p-1)q-2p+2a-2b-c-d+e$ 及第 3 步的 $h(p,q)$,以求 $R(p)=\text{Res}\ q(g_1(p,q), h(p,q))$，得到

$$\deg p(R) = 12$$

$$\deg a(R) = \deg b(R) = \deg c(R) = \deg d(R) = \deg e(R) = 5$$

$$\deg f(R) = \deg g(R) = \deg h(R) = 4$$

由此可知，得到的 p 的 12 次式 $R(p)$ 是 Q 上的既约式，且是次数最小的多项式。

《大成算经》的演段结果是 p 的 50 次方程，可以被上述 12 次式 $R(p)$ 整除。消元结果的方程次数的不同，是因为消元次序或化简等造成的。结果表明，《大成算经》的演段可以简化，而且由此可理解关孝和在解伏题中设立“定乘”步骤之良苦用心。

本章小结

吴文俊院士曾经说过：

> 在宋元时期，创立了天元术，相伴而生的是多项式概念、表达方法、运算法则，以及一般消去法的建立，到元朱世杰的《四元玉鉴》，已可解多至四个未知数的高次联立方程组，只是由于我国古代不用笔算而用筹算，计算须在筹算板上进行，才只能局限于四个未知数，就其理论与方法的实质而论，应是可以推行于任意高次联立方程组的[1]。

和算家的消元理论正好反映了这一精辟论断，关孝和的解伏题正是朱世杰四元术的延伸。而推动宋元消元理论在和算中发展的决定性因素，乃是在天元术基础上发展起来的和算文字代数方法，以及《九章算术》“勾股”内容发展而来的、以几何图形度量计算为中心的中国古代几何代数化的数学传统。关孝和的旁书法，克服了宋元筹算位置代数的缺陷，使其解伏题演段法胜于朱世杰的四元相消法，从而由天元术发展成一般化的高次联立方程组消元程序。其消元过程，实际就是对多元高次代数方程组整序以化为三角形方程组的机械化程序。正是由于和算解伏题这一机械化方法的建立，才保证和推动了和算在几何代数化道路上的继续发展，导致和算后期以“容题”为代表的、计算性的和式几何的发达。这样，我们也就不难理解，为

---

〔1〕 吴文俊. 吴文俊论数学机械化[M]. 济南：山东教育出版社，1996：492.

何出现和算问题中图形计算十分普遍的文化现象。从今日数学机械化理论的角度而论，当我们考察中外数学机械化思想发展史时，不可忽视和算解伏题在这方面的重要成就，比诸其行列式理论方面的意义更具有现实意义和科学价值。

宋元数学的独特之处正是表现为引入天元术代数方法而形成的形式化数学研究模式，明代随天元术的失传而使形式化数学研究和代数化几何研究转趋沉寂。和算家通过对天元术的继承与改造，承袭和发展了宋元代数化几何的数学传统。众所周知，欧洲数学由于笛卡儿解析几何方法的建立而使欧洲数学走上了代数解析的道路，为近代数学的发展奠定了基础。而在宋元代数化几何传统上发展起来的和式几何与笛卡儿解析几何一样，都是世界数学文化中的重要遗产，其数学思想对今天的计算代数和机器证明研究都具现实意义。对和式几何之源流及其消元理论的考察，清楚表明，吴文俊所称其数学机械化思想来源于中国宋元数学传统之观点并非无据之言。

另一方面，吴方法及 Gröbner 基方法在和式几何研究中的应用，不仅揭示汉字文化圈数学的机械化特征，而且对于解决和算疑难问题的和算史研究也有现实意义和实用价值，尤其对于日本幕末丰富且颇具难度的几何问题的验证，有着特殊作用。数学史的研究对象是历史上的数学，因此现代的数学思想、数学方法和数学工具等影响我们的历史认识，也可以成为历史研究的工具而拓展数学史研究的手段。和算著作以及算额中还存在大量的几何问题没有解答，或和算家的特殊解法有待检验，若将解伏题的消元理论进行科学改造并在计算机上实现，那么对于解决上述历史疑难问题会有所助益。

第 4 章
多项式函数插值法：招差术*

由于对日、月、五大行星非均匀运动的研究，中国古代历法推算中采用了今日所谓插值法的函数逼近算法——招差术，以构造多项式函数来近似计算日月五星的运动位置。自隋代刘焯（544～610）《皇极历》发其端，迄元代郭守敬（1231～1316）《授时历》之"平立定三差法"，其算法一脉相承，并成为中国历算中最主要的数学方法。然而，郭守敬之后，招差法在中国发展甚微，明代畴人无相关研究，清初黄鼎（生卒年不详）仅为抄录，梅文鼎（1633～1721）为之图解，黄宗羲（1610～1695）、顾观光（1799～1862）、李善兰（1811～1882）受经学影响也仅为注解而已，直至晚清，在西方数学的影响下，才出现华蘅芳（1833～1902）关于差分算法的系统研究。招差法传入日本后，对和算产生了深刻影响，成为和算中一项重要内容与方法，在和算从中算传统走向微积分方法的过程中发挥了重要作用。关于招差法在日本的发展情况，国内仅 20 世纪 50 年代李俨（1892～1963）的《中算家的内插法研究》一文附带介绍一点[1]，主要叙及关孝和的累裁招差法，不甚全面。本章将考察招差法在日本江户时代的发展，分析和算招差法的算法源流，并试图探讨造成招差法在中日出现不同局面的原因。

---

* 本章内容的主体曾发表于李迪主编的《数学史研究(第七集)》[C]. 呼和浩特：内蒙古大学出版社，台北：九章出版社，2001.

〔1〕 李俨. 中算家的内插法研究[M]. 北京：科学出版社，1957.

4.1 函数插值法原理

插值法是函数逼近的重要方法。当函数 $f(x)$ 不能直接写出表达式或表达式不便求函数值时，通过给出函数 $f(x)$ 在若干个点 $x_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 上的函数值 $f(x_i)$ 或导数值 $f'(x_i)$，由这些数值构造出一个简单的函数 $\phi(x)$，使 $\phi(x) \approx f(x)$。当 $x=x_i$ 时，$\phi(x_i)=f(x_i)$ 或 $\phi'(x_i)=f'(x_i)$，即 $\phi(x)$ 是 $f(x)$ 的一个逼近函数，这个逼近函数 $\phi(x)$ 仅在某些点上与 $f(x)$ 有相同的函数值或导数值。这样的函数逼近问题就叫做插值问题。

记 X 是由函数组成的线性空间，$\phi_1(x)$，$\phi_2(x)$，$\cdots$，$\phi_n(x)$ 是 X 中的 n 个线性无关元，由 $\phi_1(x)$，$\phi_2(x)$，$\cdots$，$\phi_n(x)$ 组成的 n 维子空间记作 $X_n=\mathrm{span}\{\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n\}$。在 X 上给定 n 个线性泛函 λ_1，λ_2，$\cdots$，λ_n 和 n 个数 α_1，α_2，$\cdots$，α_n。如果需要在 X_n 中寻找一个连续函数 $\phi(x)$，使其满足 n 个约束条件（又称作插值条件）：$\lambda_i(\phi)=\alpha_i(i=1, 2, \cdots, n)$，其中 λ_1，λ_2，$\cdots$，λ_n 称作 n 个插值泛函。

当 $\alpha_i=\lambda_i(f)$，即 $\lambda_i(\phi)=\lambda_i(f)\ (i=1, 2, \cdots, n)$ 时，如果存在满足此条件的 $\phi(x)$，则称 $\phi(x)$ 为 $f(x)$ 的插值函数，$f(x)$ 称作被插函数，(x_i, α_i) 称作插值点或插值节点。

由于 $\phi \in X_n$，故 $\phi(x)$ 可写成 $\phi(x)=\sum_{k=1}^{n} c_k \phi_k(x)$，其中 c_i 是待定常数，由方程组 $\sum_{k=1}^{n} c_k \lambda_i(\phi_k)=\alpha_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 所决定。

当 $\phi(x)$ 为多项式函数（记作 $P(x)$）时，称作多项式插值，它是最简单而且最常用的插值。下面介绍几类常见的多项式插值公式。

4.1.1 Lagrange 插值公式

定理 4.1.1　对于任意 $n+1$ 个插值点 $(x_i, f(x_i))\ (i=0, 1, 2, \cdots, n,\ x_i \neq x_k,\ i \neq k)$，存在唯一的多项式 $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$，使得 $P(x_i)=f(x_i)$。

证明：（唯一性）对于任意两个多项式 P_1，P_2，它们满足

$$P_1(x_i) = P_2(x_i) = f_i \quad (i = 0, 1, 2, \cdots, n)$$

多项式 $P = P_1 - P_2$ 的次数至多为 n，但它至少有 $n+1$ 个相异零点，即

(x_i, f_i) $(i = 0, 1, 2, \cdots, n)$。因此，P 必须为 0，即 $P_1 = P_2$。

（存在性）借助多项式 $L_i(i = 0, 1, 2, \cdots, n)$，来显式地构造插值多项式 P，其中

$$L_i(x_k) = \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k. \end{cases} \tag{4.1}$$

以下 Lagrange 多项式满足上面的条件：

$$L_i(x) \equiv \frac{(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)} \tag{4.2}$$

$$\equiv \frac{\omega(x)}{(x - x_i)\omega'(x_i)}, \text{其中 } \omega(x) \equiv \prod_{k=0}^{n}(x - x_k)。$$

至此，上述证明已指出了 Lagrange 多项式(4.2)是由式(4.1)唯一决定的。

可以利用多项式 L_i 直接表示插值问题的解 P，得到 Lagrange 插值公式：

$$P(x) \equiv \sum_{i=0}^{n} f_i L_i(x) \equiv \sum_{i=0}^{n} f_i \prod_{\substack{k \neq i \\ k = 0}}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k} \tag{4.3}$$

Lagrange 插值公式最简单的形式是线性插值（一次插值）与抛物插值（二次插值），它们分别由两个插值点和三个插值点来确定。关于 Lagrange 插值余项，有以下性质：

定理 4.1.2　如果函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上含有节点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$，$f(x)$ 在 $[a, b]$ 内有直到 $n+1$ 阶导数，且有 $P(x_i) = f_i(i = 0, 1, 2, \cdots, n)$，则对于 $\forall x \in [a, b]$，有

$$f(x) - P(x) \equiv f(x) - \sum_{i=0}^{n} f_i L_i(x) \equiv f(x) - \sum_{i=0}^{n} f_i \prod_{\substack{k \neq i \\ k = 0}}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}$$

$$\equiv \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{k=0}^{n}(x - x_k) \tag{4.4}$$

其中：ξ是与x有关的点，包含于由点x_0，x_1，…，x_n和x所界定的范围内，故$\xi \in [a, b]$。

4.1.2 Newton 插值

对于$n+1$个节点x_1，x_2，…，x_n，x_{n+1}，考虑n次多项式

$$P(x) = c_0 + c_1(x - x_1) + c_2(x - x_1)(x - x_2) + \cdots + c_n(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n) \tag{4.5}$$

如果满足$P(x_i) = f(x_i)$ $(i = 1, 2, \cdots, n, n+1)$，那么它就是$n+1$个节点的插值多项式。对于这样的$P(x)$，有

$$P(x_1) = c_0 = f_1$$
$$P(x_2) = c_0 + c_1(x_2 - x_1) = f_2$$
$$P(x_3) = c_0 + c_1(x_3 - x_1) + c_2(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) = f_3$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$
$$P(x_n) = c_0 + c_1(x_n - x_1) + c_2(x_n - x_1)(x_n - x_2) + \cdots + c_{n-1}(x_n - x_1)(x_n - x_2)\cdots(x_n - x_{n-1}) = f_n$$
$$P(x_{n+1}) = c_0 + c_1(x_{n+1} - x_1) + c_2(x_{n+1} - x_1)(x_{n+1} - x_2) + \cdots + c_n(x_{n+1} - x_1)(x_{n+1} - x_2)\cdots(x_{n+1} - x_n) = f_{n+1}$$

从$P(x_1)$可求出c_0，再从$P(x_2)$可求出c_1，依次从$P(x_n)$求出c_{n-1}，最后从$P(x_{n+1})$求出c_n。

由上式可知，c_i是$i+1$个节点上的i次插值多项式的首项系数，c_i的值取决于平面上的$n+1$个点：$(x_1, f(x_1))$，$(x_2, f(x_2))$，…，$(x_n, f(x_n))$，$(x_{n+1}, f(x_{n+1}))$。

定义：$f(x)$在x_1，x_2，…，x_n，x_{n+1}上有定义，在其上所确定的k次插值多项式的首项系数称做$f(x)$在x_1，x_2，…，x_n，x_{n+1}上的k阶差商，记作$f(x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1})$。

差商（均差）具有以下性质：

定理4.1.3　$f(x)$在x_1，x_2，…，x_n，x_{n+1}上的k阶差商与x_1，x_2，…，x_n，x_{n+1}的次序无关。即对任意一个1，2，3，…，$k+1$的排列i_1，i_2，…，i_k，i_{k+1}，都有

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_k, x_{k+1}) = f(x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_k}, x_{i_{k+1}})$$

$f(x)$的 k 阶差商为

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_k, x_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} \frac{f(x_i)}{(x_i - x_1)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_{k+1})} \tag{4.6}$$

$k+1$ 个点 $x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}$上的 k 阶差商为

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_k, x_{k+1}) = \frac{f(x_2, x_3, \cdots, x_k, x_{k+1}) - f(x_1, x_2, \cdots, x_k)}{(x_{k+1} - x_1)}$$

对任意的 x,如果 $x \neq x_i \quad (i = 1, 2, 3, \cdots, k+1)$，则

$$\begin{aligned} f(x) = {} & f(x_1) + f(x_1, x_2)(x - x_1) + \\ & f(x_1, x_2, x_3)(x - x_2)(x - x_1) + \cdots + \\ & f(x_1, x_2, \cdots, x_k, x_{k+1}) \prod_{i=1}^{k} (x - x_i) + \\ & f(x_1, x_2, \cdots, x_k, x_{k+1}, x) \prod_{i=1}^{k+1} (x - x_i) \end{aligned} \tag{4.7}$$

如果把 $f(x)$在 $x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}$上的 k 次插值多项式记做 $P_k(x)$，则 $f(x)$在 $x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}$上的 Newton 插值公式为

$$f(x) = P_k(x) + f(x_1, x_2, \cdots, x_k, x_{k+1}, x) \prod_{i=1}^{k} (x - x_i) \tag{4.8}$$

其中 $R(x) = f(x_1, x_2, \cdots, x_k, x_{k+1}, x) \prod_{i=1}^{k} (x - x_i)$ 为插值余项。

4.1.3 等间距 Newton 插值

已知函数 $f(x)$在自变量是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$时的对应值为 $f(x_1)$, $f(x_2)$, $\cdots$, $f(x_n)$,求 x_i和 x_{i+1}之间的函数值的方法,称作内插法。如果 x_i是按等距离变化的,称自变数等间距内插法;如果 x_i是按不等距离变化的,称自变数不等间距内插法。

在 $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}$中，如果 $x_{i+1} - x_i = h$ 成立，等间距内插公式为

$$f(x+nh)=f(x)+\frac{n}{1!}\Delta f(x)+\frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 f(x)+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\Delta^3 f(x)+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}\Delta^4 f(x)+\cdots \tag{4.9}$$

其中 $h>0$，$\Delta f(x)=f(x_2)-f(x_1)$ 叫做一级差分；$\Delta^2 f(x)=\Delta f(x_2)-\Delta f(x_1)$ 叫做二级差分；……；$\Delta^n f(x)=\Delta^{n-1}f(x_2)-\Delta^{n-1}f(x_1)$ 叫做 n 级差分。由 n 级差分的定义易知，当 $f(x)$是一次函数时，二级差分是 0；$f(x)$是二次函数时，三级差分是 0；$f(x)$是 n 次函数时，$n+1$ 级差分是 0。

4.2　中国古代的插值法

中国古代历法推算中，为了确定合朔和交食的准确时刻，需要准确推算太阳与月亮分别在黄道和白道上运动的真位置。早期历法如《古四分历》、西汉的《太初历》(公元前 104)和《三统历》都采用“平朔”算法，即按照一个朔望月内月亮平均运动来确定合朔时刻。由于月球公转运动速度是变速运动，而且太阳在黄道上的运动速度也是变速的，因此平朔方法不可能推算出准确的合朔时刻。公元 1 世纪初，西汉天文学家发现了月亮在白道上的运行是变速运动，东汉刘洪(130? ～196)首次在《乾象历》(179 至 184 年间修成)中提出了采用一次内插法来确定合朔时刻，确定合朔发生的真正时刻，被称作“定朔”。刘洪测算出月亮在一个近点月周期内每日运行的度数。设日数是 n，n 日共运行的度数为 $f(n)$，对于求 $n+s$ $(n<n+s<n+1)$ 日时间内月亮运行的度数，刘洪应用一次内插公式：$f(n+s)=f(n)+s\Delta$ 来进行计算，其中 $\Delta=f(n+1)-f(n)$，是一阶差分。此后，这一算法为三国、南北朝时期的历算家所继承，以此来计算月亮运行的度数。由于月亮运动速度在一日之内变化很大，$f(n)$不是一次函数，故二阶差分 $\Delta^2 f(x)\neq 0$，因此以刘洪的一次内插公式计算只能得到不甚精密的近似值。

南北朝时期，北齐天文学家张子信(生卒年不详)发现了太阳的运行速度也不均匀，认识到太阳的非均匀变化也影响到合朔时刻的推算精度。随后天文学家开始设计测量日、月、五星视行度数的更加精密的内插公式。

隋代刘焯在《皇极历》(600)中提出一个推算日、月、五星视行度数的等间距二次内插公式：

$$f(kl+m)=f(kl)+\left(\frac{\Delta_k+\Delta_{k+1}}{2}\right)\frac{m}{l}+(\Delta_k-\Delta_{k+1})\frac{m}{l}-\frac{\Delta_k-\Delta_{k+1}}{2}\left(\frac{m}{l}\right)^2 \tag{4.10}$$

式中：节气长为 l 日，$0<m<l$，$f(kl+m)$ 为冬至后第 $x=kl+m$ 日的太阳运动的盈缩分(或称迟速数、消息数)，即太阳的实行度与平行度之差，显然有 $f(0)=0$，$\Delta_k=f(kl+l)-f(kl)$，为各节气内的损益率(或称升降差、陟降率)。刘焯《皇极历》"推每日迟速数术"如下：

> 见求所在气陟降率，并后气率，半之，以日限乘而泛总除，得气末率。又日限乘二率相减之残，泛总除，为总差。其总差亦日差乘而泛总除，为别差。率：前少者，以总差减末差，为初率，(乃)半别差加之；前多者，即以总差加末差；皆为气初日陟降数。以别差前多者日减、前少者日加初数，得每日数。所历推定气日，随算其数，陟加、降减其迟速，为各迟速数。其后气无同率及有数同者，皆因前末，以末数为初率，加总差为末率，及差渐加初率，为每日数[1]。

由日躔表可知：

$f(0)=0$

$f(l)-f(0)=\Delta_1$，$f(l)=\Delta_1$

$f(2l)-f(l)=\Delta_2$，$f(2l)=\Delta_1+\Delta_2$

$f(3l)=f(2l)=\Delta_3$，$f(3l)=\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3$

…… …… …… …… ……

$f(nl)-f((n-1)l)=\Delta_n$，$f(nl)=\Delta_1+\Delta_2+\cdots+\Delta_n$

现给出的 x 的范围为 $kl\leqslant x\leqslant(k+1)l$，令 $x=kl+m$，如图4.1所示，$0, l, 2l, \cdots, kl, \cdots$表示起于冬至的各节气时刻，$\Delta_k$表示冬至后各气的陟降率(即矩形 $A_{k-1}B_{k-1}B_kC_{k-1}$)，则迟速数 $f(x)=f(kl)+S_m=\sum_{i=1}^{k}\Delta_i+S_m$，只要求出 S_m，就可以确定 $f(x)$。E_kF_k，$E_{k+1}F_{k+1}$是相邻矩形内的中位线，

[1] 长孙无忌等. 隋书・志第十三[A]. 历代天文律历等志汇编[C]. 北京：中华书局. 1976.

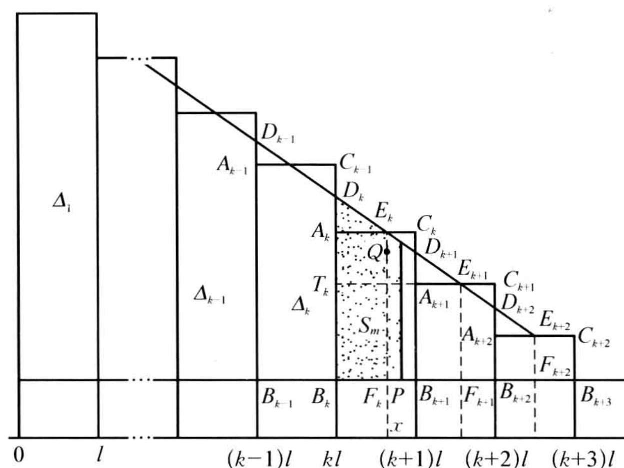


图 4.1　刘焯插值法的数理分析

矩形 $A_kB_kB_{k+1}C_k$ 面积等于梯形 $D_kB_kB_{k+1}D_{k+1}$ 面积，所以有

前气中率：$E_kF_k = \dfrac{\Delta_{k+1}}{l} = \dfrac{f((k+1)l)-f(kl)}{l}$

后气中率：$E_{k+1}F_{k+1} = \dfrac{\Delta_{k+2}}{l} = \dfrac{f((k+2)l)-f((k+1)l)}{l}$

初项为 D_kB_k，以下分别求出：

总差 $D_kB_k - D_{k+1}B_{k+1} = E_kF_k - E_{k+1}F_{k+1} = \dfrac{\Delta_k - \Delta_{k+1}}{l}$

日差＝总差÷l＝$\dfrac{D_kB_k - D_{k+1}B_{k+1}}{l} = \dfrac{\Delta_k - \Delta_{k+1}}{l^2}$

初率 $V_1(kl) = D_kB_k = E_kF_k + \dfrac{1}{2}$总差 $= \dfrac{\Delta_k}{l} + \dfrac{\Delta_k - \Delta_{k+1}}{2l} =- \dfrac{\Delta_k^2}{2l}$

于是，

初日定率 $V_1\left(kl+\dfrac{1}{2}\right) = D_kB_k - \dfrac{1}{2}$ 日差

$$= \frac{\Delta_k}{l} + \frac{\Delta_k - \Delta_{k+1}}{2l} - \frac{1}{2}\,\frac{\Delta_k - \Delta_{k+1}}{l^2} = \frac{\Delta_k}{l} - \frac{\Delta_k^2}{2l} + \frac{1}{2}\,\frac{\Delta_k^2}{l^2}$$

kl 后第 m 日定率 $V_1\left(kl+m-\dfrac{1}{2}\right) = V_1\left(kl+\dfrac{1}{2}\right) - (m-1)\times$ 日差

$$
\begin{aligned}
S_m &= \sum_{i=1}^{m} V_1\left(kl + i - \frac{1}{2}\right) \\
&= \left(\frac{3\Delta_k - \Delta_{k+1}}{2l} - \frac{\Delta_k - \Delta_{k+1}}{2l^2}\right)m + \left(\frac{\Delta_k - \Delta_{k+1}}{2l^2}\right)m(m-1)
\end{aligned}
$$

于是迟速数为

$$
\begin{aligned}
f(kl+m) &= f(kl) + S_m \\
&= f(kl) + \left(\frac{3\Delta_k - \Delta_{k+1}}{2l} - \frac{\Delta_k - \Delta_{k+1}}{l}\right)m + \left(\frac{\Delta_k - \Delta_{k+1}}{2l^2}\right)m^2
\end{aligned}
$$

即 $f(kl+m) = f(kl) + \left(\dfrac{\Delta_k + \Delta_{k+1}}{2}\right)\dfrac{m}{l} + (\Delta_k - \Delta_{k+1})\dfrac{m}{l} - \dfrac{\Delta_k - \Delta_{k+1}}{2}\left(\dfrac{m}{l}\right)^2$

$$
= f(kl) + \left(\frac{\Delta_k + \Delta_{k+1}}{2}\right)\frac{m}{l} - \Delta_k^2 \frac{m}{l} + \frac{\Delta_k^2}{2}\left(\frac{m}{l}\right)^2
$$

求太阳的视行度数时，l 是一节气的日数；求月行度数时，$l=1$ 日。刘焯的公式虽比以前精密很多，但由于节气的日数 l 实际上不是按等间距变化的，日、月、五星也不作等加速运动（就是说三级差分不等于 0），因此仍然存在缺点。这两个问题分别由唐代一行（683～727）和元代郭守敬等解决了。

唐玄宗开元十五年（727），一行在他的《大衍历》中提出了不等间距的二次内插公式：

$$
f(t+x) = f(t) + \left(\frac{\Delta_1 + \Delta_2}{l_1 + l_2}\right)x + \left(\frac{\Delta_1}{l_1} - \frac{\Delta_2}{l_2}\right)x - \left(\frac{\Delta_1}{l_1} - \frac{\Delta_2}{l_2}\right)\frac{x^2}{l_1 + l_2} \tag{4.11}
$$

其中（$l_1 \neq l_2, x < l$），当 $l_1 = l_2$ 时，和刘焯的等间距二次内插公式相同。

从公元 3 世纪到公元 13 世纪一千多年中，内插法在天文学家和数学家中得到广泛的应用，除上面提到的以外，如唐代傅仁均（生卒年不详）的《戊寅历》（619）、李淳风（602～670）的《麟德历》（664）、徐昂（生卒年不详）的《宣明历》（822）、南宋秦九韶《数书九章》（1247）的“缀术推星”都有应用。

元郭守敬等的《授时历》（1281）在计算日、月、五星视行度数中考虑了日、月、五星运行的不等速运动情况，认为距离是时间的三次函数。但《授时历》没有求出三次内插公式，而是用差分表来解决这个问题的。根据《明

史·历志·大统历》所录,《授时历》的推算日躔的术文如下:

置第一段日平差,四百七十六分二十五秒,为泛平积。以第二段二差一分三十八秒,去减第一段一差十八分四十五秒,余三十七分零七秒,为泛平积差。另置第一段二差一分三十八秒,折半得六十九秒,为泛立积差。以泛平积差三十七分零七秒,加入泛平积四百七十六分二十五秒,共得五百一十三分三十二秒,为定差。以泛立积差六十九秒,去减泛平积差三十七分零七秒,余三十六分三十八秒,为实,以段日一十四日八十二刻为法,除之,得二分四十六秒,为平差。置泛立积差六十九秒为实,以段日为法,除二次,得三十一微,为立差。

凡求盈缩,以入历初末日乘立差,得数以加平差,再以初末日乘之,得数以减定差,余数以初末日乘之,为盈缩积[1]。

在日躔计算中,《授时历》把冬至到春分(共 88.91 日)这一象限分成六段(每段时间为 $l=88.91\div6=14.82$ 日),测出每段太阳的实际运行度数,就可以算出以段为等间距的差分表。其差分表如下:

段数 i	积日 x_i	积差 $F(x_i)$	日平差 $F(x_i)/x_i$	一差 Δ_i^1	二差 Δ_i^2
第 1 段	l	0.705 80	0.047 625	−0.003 845	−0.000 138
第 2 段	$2l$	1.297 64	0.043 780	−0.003 983	−0.000 138
第 3 段	$3l$	1.769 37	0.039 797	−0.004 121	−0.000 138
第 4 段	$4l$	2.114 87	0.035 676	−0.004 259	−0.000 138
第 5 段	$5l$	2.328 00	0.031 417	−0.004 397	
第 6 段	$6l$	2.402 62	0.027 020		

上表中,积差 $F(x_i)$ 的数值主要是通过实际观测而得到的,是太阳在 x_i 时间内的实际行度。令 $x_i = il$ $(i=0, 1, 2, 3, \cdots)$,按差分的定义便可以求出 $f(0)$,Δ_i^1,Δ_i^2($\Delta_i^3=0$),继续按差分定义,用加减法就可以得出以日为等间距的差分表。分析其差分表可知,三级差分都相等,也即四级差分等于 0,因此为三次插值多项式

$$f(x) = d + ax + bx^2 + cx^3$$

又因为 $f(0)=0$(第 0 段的运行度数是 0),即 $d=0$,所以 $f(x)=ax+$

〔1〕 张廷玉等. 明史·志第九[A]. 历代天文律历等志汇编[C]. 北京:中华书局,1976.

$bx^2 + cx^3$。

于是原来的三次插值函数转化为二次插值函数

$$F(x) = \frac{f(x)}{x} = a + bx + cx^2 \tag{4.12}$$

应用二次内插公式便可以算出 $F(x)$ 的具体表达式，从而得到

$$f(x) = xF(x) = 513.32x - 2.46x^2 - 0.0031x^3。$$

《授时历》中的三次插值法还应用于月亮、五星的运动计算。

与函数插值法相关的另类数学问题是级数求和问题，它们都与多项式理论有关。元代朱世杰的《四元玉鉴》(1303)在垛积求和研究中，给出了一般形式的差分公式，其卷中之十的“如象招数门”共有 5 个问题是高阶等差数列求和问题。第五题的术文及其自注给出了一个三阶等差级数 $\sum_{k=1}^{n}(2+k)^3$ 的求和公式。该题如下：

> 今有官司依立方招兵，初招方面三尺，次招方面转多一尺。每人日支钱二百五十文，已招二万三千四百人，文钱二万三千四百六十二贯，问招来几日？[1]

这个问题是：已知一级差分 $\Delta f(n) = (2+n)^3 (n = 1, 2, \cdots, 15)$，求 $f(n)\ (n = 15)$。朱世杰给出的公式是：

$$f(n) = n\Delta + \frac{1}{2!}n(n-1)\Delta^2 + \frac{1}{3!}n(n-1)(n-2)\Delta^3 + \frac{1}{4!}n(n-1)(n-2)(n-3)\Delta^4 \tag{4.13}$$

其中：Δ, Δ^2, Δ^3, Δ^4 分别表示各级差分的第一个差分。

朱世杰在这一问题的自注中说明道：

> 求兵者，今招为上积，又今招减一为茭草底子积，为二积；又今招减二为三角底子积，为三积；又今招减三为三角落一积，为下积。以各差

[1] 朱世杰. 四元玉鉴[A]. 郭书春主编. 中国科学技术典籍通汇・数学卷[Z]. 第 1 册. 郑州：河南教育出版社，1993：1250.

乘各积，四位并之，即招兵数也[1]。

如设今招兵日数为 n，则

以“今招减一”，即 $n-1$ 为一般项“底子”的茭草积，等于

$$\sum_{k=2}^{n}(k-1)=\frac{1}{2!}n(n-1)$$

以“今招减二”，即 $n-2$ 为一般项“底子”的三角垛积，等于

$$\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{2!}(k-2)(k-1)=\frac{1}{3!}n(n-1)(n-2)$$

以“今招减三”，即 $n-3$ 为一般项“底子”的三角落一形垛积，等于

$$\sum_{k=4}^{n}\frac{1}{3!}(k-3)(k-2)(k-1)=\frac{1}{4!}n(n-1)(n-2)(n-3)$$

另外，朱世杰又“求得上差二十七，二差三十七，三差二十四，下差六”。

也就是说，如果令 $f(n)$ 表示 n 日共招兵数，即 $f(n)=\sum_{k=1}^{n}(2+k)^3$，再规定 $f(0)=0$，则上差 $\Delta f(0)=27$，二差 $\Delta^2 f(0)=37$，三差 $\Delta^3 f(0)=24$ 及下差 $\Delta^4 f(0)=6$，如此，则朱世杰的四次差招差公式为

$$\begin{aligned}f(n)&=27n+37\cdot\frac{1}{2!}n(n-1)+24\cdot\frac{1}{3!}n(n-1)(n-2)+\\&\quad 6\cdot\frac{1}{4!}n(n-1)(n-2)(n-3)\\&=n\Delta f(0)+\frac{1}{2!}n(n-1)\Delta^2 f(0)+\frac{1}{3!}n(n-1)(n-2)\Delta^3 f(0)+\\&\quad\frac{1}{4!}n(n-1)(n-2)(n-3)\Delta^4 f(0)\end{aligned}\tag{4.14}$$

朱世杰明确指出，上式中的第二、三、四项系数恰好是“三角垛系统”中的级数和，所以，中国数学史界常常认为，朱世杰获得了牛顿插值公式。

朱世杰解决的是求任意类型的高阶等差级数和的问题，根据多项式函

---

〔1〕 朱世杰. 四元玉鉴[A]. 郭书春主编. 中国科学技术典籍通汇·数学卷[Z]. 第1册. 郑州：河南教育出版社，1993：1251.

数的系列函数值来确定多项式函数，自变量为自然数。《授时历》的三次插值法是函数逼近问题，以多项式函数逼近任意函数，自变量(《授时历》中称作限数)是没有限制的。两者之间既有内在的逻辑关联，也有差别。其内在的逻辑关联在于多项式理论。郭守敬、王恂并没有采用“招差”这一术语，直至清初的黄鼎才在他的《天文大成管窥辑要》中称《授时历》的三差法为“堆叠招差法”，表明他开始意识到垛积与招差的联系。另外，郭守敬、王恂求定、平、立三差也不具朱世杰招差法那样的程序化，更没有指出其法可以推广到四次以上多项式函数。另一方面，朱世杰在《四元玉鉴》中也没有指明他的招差法与《授时历》的三次内插法的关系。而真正把《授时历》的三次插值推广到 n 次插值，并且将之与垛积术联系起来的数学家，是和算家关孝和，关于这一点，从本章的下节内容以及下一章内容可以看到。

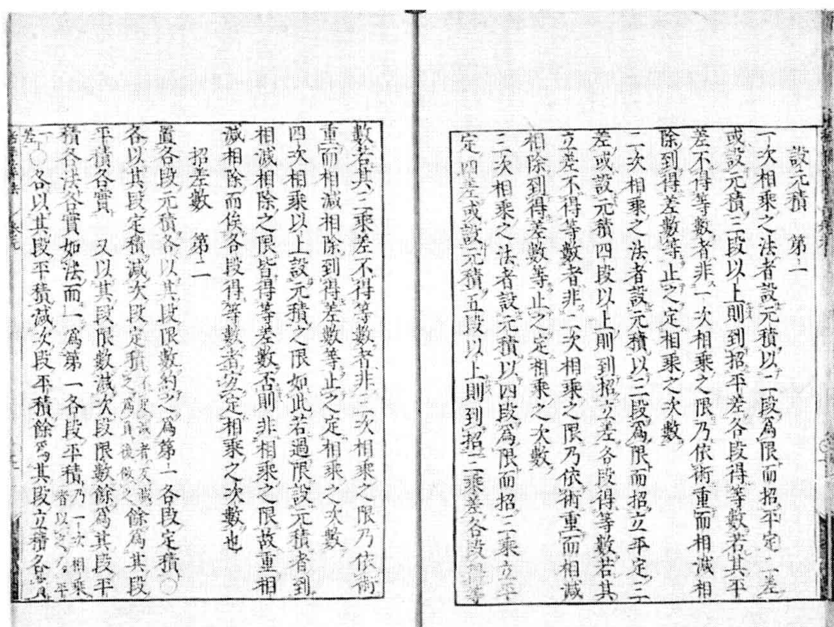
中国古代天文历算中的内插法由隋代刘焯开创二次内插，经唐代一行与徐昂的传承，迄元代郭守敬与王恂(1235～1281)发展出三次内插法，整个算法逐渐成熟。而对垛积招差的研究则始自北宋沈括(1031～1095)，经南宋杨辉，直至元代朱世杰提出四次招差公式，招差术与垛积术相结合，形成一套完整的有限差分算法。

4.3　关孝和的累裁招差术

和算招差法最早出现于关孝和的《括要算法》(1712)，该书元卷“垛积总术”首论招差法，次论垛积术，另外关孝和、建部贤弘、建部贤明合编的《大成算经》(1711)卷五“叠乘第二”中也有这方面的内容。《括要算法》所载累裁招差法方法(如图 4.2)如下：

> 夫元积之各数，参差者，齐之以累裁招差之法求之矣。凡以定积一次相减，各积差得等数者，招平定二差，而依一次相乘之法[古所谓三差之法也]求之。到二次相减，各积差得等数者，招立平定三差，而依二次相乘之法[古所谓相减相乘之法也]求之。到三次相减，各积差得等数者，招三乘立平定四差，而依三次相乘之法求之。借俟各段得等数者，而招诸差率求元积也[1]。

〔1〕 関孝和. 括要算法[A]. 元卷. 平山諦，下平和夫，広瀬秀雄編. 関孝和全集[Z]，大阪：大阪教育図書株式会社，1974：273－274.



設元積　第一

一次相乘之法者設元積以二段爲限而招平定二差或設元積三段以上則到招平差各段得等數若其平差不得等數者非一次相乘之限乃依術重而相減相除到得差數等止之定相乘之次數

二次相乘之法者設元積以三段爲限而招立平定三差或設元積四段以上則到招立差各段得等數若其立差不得等數者非二次相乘之限乃依術重而相減相除到得差數等止之定相乘之次數

三次相乘之法者設元積以四段爲限而招三乘立平定四差或設元積五段以上則到招三乘差各段得等數若其三乘差不得等數者非三次相乘之限乃依術重而相減相除到得差數等止之定相乘之次數

四次相乘以上設元積之限如此若過限設元積者到相減相除之限皆得等差數否則非相乘之限故重相減相除而俟各段得等數者必定相乘之次數也

招差數　第二

置各段元積各以其段限數約之爲第一各段定積○各以其段定積減次段定積餘爲其段平積各實　又以其段限數減次段限數餘爲其段平積各法各實如法而一爲第一各段平積

一○各以其段平積減次段平積餘爲其段立積各實

图 4.2　关孝和《括要算法》(1712)元卷

和算家沿袭中算术语，对于插值多项式

$$f(x)=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n \tag{4.15}$$

把自变量 x_i 称作各段限数，函数值 $f(x_i)$ 称作各段元积，插值多项式系的数 a_1，a_2，a_3，…，a_n 依次称作定差、平差、立差、三乘差、…、$n-1$ 乘差。之所以采用没有常数项的插值多项式 $f(x)$，是因为继承《授时历》的传统。后来，安岛直圆（Ajima Naonobu，1739～1798）将其扩充到含有常数项 a_0 的一般情形，并称之为直差。以上术文指出，对于辅助函数 $F(x)=f(x)/x$，如果一阶差分相等（即二阶差分为 0），则可确定 $F(x)$ 为一次函数（$f(x)$ 为二次函数），只需求出 a_1，a_2；如果二阶差分相等（即三阶差分为 0），则可确定 $F(x)$ 为二次函数（$f(x)$ 为三次函数），只需求出 a_1，a_2，a_3；一般地，如果 $n-1$ 阶差分相等（即 n 阶差分为 0），则可确定 $F(x)$ 为 $n-1$ 次函数（$f(x)$ 为 n 次函数），只需求出 a_1，a_2，…，a_n。

至于确定多项式系数 a_i 的招差步骤，关孝和的累裁招差法由以下三部分构成：

1）设元数

一次相乘之法者，设元积以二段为限，而招平定二差，或设元数三

段以上，则到招平差各段得等数，若其平差不得等数者，非一次相乘之限，乃依术重而相减相除，到得差数等止之，定相乘之次数。

二次相乘之法者，设元积以三段为限，而招立平定二差，或设元数四段以上，则到招立差各段得等数，若其立差不得等数者，非二次相乘之限，乃依术重而相减相除，到得差数等止之，定相乘之次数……[1]

此即给出了确定插值多项式(4.15)的必要条件：给定 n 个插值节点 $(x_i, f(x_i))$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ 且 n 阶差分为0。这里讨论的是如何根据差分为0的差分阶数，确定插值多项式的次数。由于继承《授时历》的三差法传统，故将 i 称做段数，将 x_i 称做各段限数，将 $f(x_i)$ 称做各段元积。

2）招第一差数 a_n

置各段元积，各以其段限数约之，为第一各段定积，各以其段定积减次段定积[不足减者，反减之为负，后仿之][2]，余为其段平积各实，又以其段限数，减隔一段后段限数，余为其段立积各法，各实如法而一，为第一各段立积[乃二次相乘者，以之为平一差]。

各以其段平积减次段平积，余为其段立积各实，又以其段限数，减次段限数，余为其段平积各法，各实如法而一，为第一各段平积[乃一次相乘者，以之为立一差]……

逐如此相减相除，随相乘之次数止之，为其极乘之一差数。

这段术文说明的是，采用相减相除的机械化程序求 a_n，其招差过程如下：

限数	元积	定积	平积	立积		$n-2$ 乘积	$n-1$ 乘积
x_1	y_1	$\dfrac{y_1}{x_1}=z_1$	$\dfrac{z_2-z_1}{x_2-x_1}=\Delta y_1$	$\dfrac{\Delta y_2-\Delta y_1}{x_3-x_1}=\Delta^2 y_1$	$\cdots$	$\dfrac{\Delta^{n-3}y_2-\Delta^{n-3}y_1}{x_{n-1}-x_1}=\Delta^{n-2}y_1$	$\dfrac{\Delta^{n-2}y_2-\Delta^{n-2}y_1}{x_n-x_1}=\Delta^{n-1}y_1$
x_2	y_2	$\dfrac{y_2}{x_2}=z_2$	$\dfrac{z_3-z_2}{x_3-x_2}=\Delta y_2$	$\dfrac{\Delta y_3-\Delta y_2}{x_4-x_2}=\Delta^2 y_2$	$\cdots$	$\dfrac{\Delta^{n-3}y_3-\Delta^{n-3}y_2}{x_n-x_2}=\Delta^{n-2}y_2$	
			$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	
x_{n-1}	y_{n-1}	$\dfrac{y_{n-1}}{x_{n-1}}=z_{n-1}$	$\dfrac{z_n-z_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}=\Delta y_{n-1}$				
x_n	y_n	$\dfrac{y_n}{x_n}=z_n$					

其中 $\dfrac{y_i}{x_i}=z_i$ 称作各段定积；$\Delta^{k-1}y_{i+1}-\Delta^{k-1}y_i$ 称作 k 乘积实；$x_{i+k}-x_i$ 称作

---

[1] 関孝和. 括要算法[A]. 元卷. 平山諦，下平和夫，広瀬秀雄編. 関孝和全集[Z]. 大阪：大阪教育図書株式会社，1974：273-274.

[2] 括号[　]内的文字为原书双行夹注，下同。

k 乘积法；$\dfrac{\Delta^{k-1}y_{i+1}-\Delta^{k-1}y_i}{x_{i+k}-x_i}$ 称作 k 乘积（$i=1,2,\cdots,n-1$）。于是求得 $n-1$乘积 $\Delta^{n-1}y_1$，即为 a_n。

3）招各乘差数 $a_{n-1},\cdots,a_2,a_1$

各置其段限数，依第一差相乘之次数若干自乘[乃第一得平差者直，得立差者自乘，得三乘差者再自乘也，余仿之]，以所求第一差乘之，得数以减第一各段定积，为第二各段定积[乃一次相乘者，于此得各段积等而止，即以之为定二差]。

各以其段定积减次段定积，余为其段平积实，如各段平积法[乃各段之法者，第一所求也，后皆仿之]而一，为第二各段平积[乃二次相乘者，以之为平二差]……

逐如此相减相除，到第一乘数之前积，得各段等数而止之，为二差数。

各置其段限数，依第二差相乘之次数若干自乘，以所求第二差乘之，得数以减第二各段定积，为第三各段定积[乃二次相乘者，于此得各段积等而止，即以之为定三差]……

次第如此求之到乘数之始得定积各段等而止之，即为定差也[1]。

第一遍求得 a_n后，作变换 $f(x)-a_nx^n=f_1(x)$，对 $f_1(x)=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$，仿第一遍招差算法，第二遍求得 a_{n-1}，并再作降次变换：

$$f_1(x)-a_{n-1}x^{n-1}=f_2(x)=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_{n-2}x^{n-2}$$

如此不断招各差 a_k，并作降次变换 $f_{n-k+1}(x)=f_{n-k}(x)-a_kx^k$（$k=n,n-1,n-2,\cdots,2$），依次求出系数 $a_{n-1},\cdots,a_2,a_1$。

“累裁”一词来源于清初黄鼎的《天文大成管窥辑要》，其中“论黄赤差”曰：“一行大衍立累裁之法以求之，每距冬至前后各五度为限，初数十二，每限减一……”[2]，实际是指一行用差分表推求黄、赤道度(参见《大衍历》“推冬至岁差所在”)。因此，和算家所谓“累裁招差”，即指利用差分表求插值多项式之系数。

---

〔1〕 関孝和. 括要算法[A]. 元卷. 平山諦，下平和夫，広瀬秀雄編. 関孝和全集[Z]. 大阪：大阪教育図書株式会社，1974：273－274.

〔2〕 関孝和. 関訂書[A]. 平山諦，下平和夫，広瀬秀雄編. 関孝和全集[Z]. 大阪：大阪教育図書株式会社，1974：428.

在关孝和时代，《史记》至《元史》的“二十三史”一直在日本传播，包括《授时历议》、《授时历经》的《元史》于1453年就已传入日本，根据《授时历》编造的《大统历》在此以前也已传入日本，贞享元年(1684)三月至十月幕府行用了《大统历》，而且涉川春海(Shibukawa Harumi，1639～1715)的《贞享历》也是根据《授时历》编造的。由于《宣明历》在日本行用时间太久，历日与天象不合现象十分严重，如何改历成为江户时代日本人普遍关注的问题。1672年《元史》中的《授时历经历议》在日本刊行，推动了《授时历》在日本的传播和研究，1673年，小川正意(Ogawa Shoi，生卒年不详)所著《新勘授时历经及び同立成》刊行。1674年《发微算法》出版以后，关孝和主要精力投入历学研究，主要研究《授时历》，1680年著《授时发明》，1681年著《授时历经立成之法》及《授时历经立成》。除《元史》中的《授时历经历议》外，清初黄鼎的《天文大成管窥辑要》(1652)对关孝和接受和推广三差法也有直接的影响，贞亨三年(1686)关孝和著《关订书》，对《天文大成管窥辑要》进行了订正。

对于《授时历》中的招差法原理，黄鼎在《天文大成管窥辑要》中叙之甚详，现转述如下：

> 郭太史立招差法以推之：列实测盈缩积差各六段，亦以六除二至后所入初末限，得盈缩每段积日。各以段积日除各段下积差，得各段平差，是差虽平于一段，而较之各段犹未平也，即为每段泛平差积。以各段平差前后相减，为一差，其得数尚未齐，乃平差逐段渐少之差分也。又以一差前后相减，为二差，而各段之得数齐矣。即以第一段平差为泛平积，用本段二差，加减一差，为泛平差，以加减泛平积，为定平积；是即所谓定差也。以二除二差，为立差，加减泛平差，为定平差。以段日除之，为日定平差，即所谓平差也。以段日再除立差，为日立差，即所谓立差也。其加减法，皆以后多前少者为减，前多后少者为加。是以求差之法，置立差，以限乘之，并平差，再以限乘之，以平差一除，故一乘；立差再除，故再乘也。盖以平立二差为消息之法，用之以减定差，其定差又与限相乘而得差者，以段积日与段积差相除故也。所得盈缩差数与所测允合。此以三差立法，最为奇捷[1]。

---

[1] 黄鼎. 天文成管窥辑要[M]，卷八“论日躔盈缩差”. 顺治十年(1653)，云林阁刊本.

导致关孝和脱离天文学计算的物理背景而将《授时历》招差法推广成一般化的有限差分算法的直接原因，是他青年时代业已完成的对天元术代数方法的改造。在他 1674 年著作的《发微算法》中就已发明了旁书法，并在此基础上建立了以多项式运算为核心的演段法，不久整理出《解隐题之法》、《解伏题之法》。关于代数方法的进步，本书第 1 章已做详细论述。代数学的进步必然推动数学方法的一般化。

4.4　关孝和的浑沌招差术

浑沌招差法是和算中另一形式的招差法，“浑沌式”这一称法及其清晰的记叙，最初见于有马赖徸（Arima Yoriyuki，1714～1783）的《拾玑算法》（1766），现示例如下：

> 今有甲限数三，元积三十四个，乙限数五，元积八十四个，丙限数九，元积二百三十二个，丁限数一十二，元积三百六十九个五分个之三，戊限数一十五，元积五百一十五个三分个之一，依浑沌式得各差，其术如何？
>
> 答曰：直差空，定差二百五十八正，平差四百五十七正，立差一十一负，约法一百三十五。

给出五个插值点：$x_1=3$，$f(x_1)=34$；$x_2=5$，$f(x_2)=84$；$x_3=9$，$f(x_3)=232$；$x_4=12$，$f(x_4)=369\frac{3}{5}$；$x_5=15$，$f(x_5)=515\frac{1}{3}$；现要求 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$。

术　　文	解　　释
术曰：立天元一　为浑沌式， 加甲元积余　第一原式，	设自变量为 x，插值函数为 $f(x)$ 第一原式： $f_1(x)=x+(f(x_1)-x_1)=x+(34-3)=x+31$ 其中：甲元积余为 $f(x_1)-x_1=34-3=31$
列浑沌式内减甲限数，余　第一补式，	第一补式： $(x-x_1)=x-3$
列原式加入补式二十四段，得　第二原式，	第二原式： $f_2(x)=f_1(x)+k_1(x-x_1)$ $=x+31+24\ (x-3)$ $=25x-41$

（续　表）

术　　文	解　　释
列浑沌式内减乙限数，余 [算筹] 以第一补式相乘之得 [算筹] 第二补式，	第二补式： $(x-x_1)(x-x_2)=(x-3)(x-5)$ $=x^2-8x+15$
列第二原式加第二补式二段得 [算筹]，以丁积分母五遍乘之得 [算筹] 第三原式 于此比[甲乙丙]各因分母元积皆合，又比因分母丁元积[一千八百四十八个]则盈七十七个也	第三原式： $f_3(x)=f_2(x)+k_2(x-x_1)(x-x_2)$ $=25x-41+2(x-3)(x-5)$ $=2x^2+9x-11$ $f_3(x)=(10x^2+45x-55)/5$
列浑沌式内减丙限数余 [算筹]，以第二补式乘之得 [算筹] 第三补式	第三补式： $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$ $=(x^2-8x+15)(x-9)$ $=x^3-17x^2+87x-135$
列第三原式[二十七段]内减第三补式[一十一段]，余 [算筹]，第四原式 此式比[甲乙丙丁戊]各[一百三十五段]之元积恰合，故取第四原式即为成式也，随所求成式而最上级[为直差]次级数[为定差]三级数[为平差]四级数[为立差]第三原式段数[二十七]与丁积分母[五]相乘之得[一百三十五]为约法各合问〔1〕	第四原式： $f_4(x)=f_3(x)+k_2(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$ $=\dfrac{10x^2+45x-55}{5}-\dfrac{11}{135}\cdot(x^3-17x^2+87x-55)$ $135f_4(x)=27(10x^2+45x-55)-11(x^3-17x^2+87x-135)$ $=-11x^3-457x^2+258x$ 成式： $f(x)=f_4(x)=\dfrac{-11x^3-457x^2+258x}{135}$

这显然是 Newton 插值公式：对于 n 个插值点 $(x_i,\ f(x_i))$ $(i=1,2,3,\cdots,n)$

$$f(x)=f(x_1)+k_1(x-x_1)+k_2(x-x_1)(x-x_2)+\cdots+k_n(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n) \tag{4.16}$$

〔1〕有馬賴徸. 拾璣算法[M]. 明和六年(1769)，江戸須原屋茂兵衛. 狩野 7. 31413. 5，索書号：ws001601 L006 - 02.

有马赖徸没有说明求出上述 $k_1=25$，$k_2=2$，$k_3=-11/135$ 的过程，显然，将 x_i 依次代入插值多项式(4.16)容易算出。

关于浑沌招差法的方法来源，有马赖徸曾说："旧来所云累裁招差法者，详于括要算法，其他有方程、浑沌二招差术而未行刊刻，世人之所希知也。"〔1〕(如图4.3)安岛直圆在《拾玑解》也说："右方程、浑沌二法者，关夫子所创制之神法，而固吾门所秘藏也"〔2〕，并且在《招差捷术》中又说："凡招差术止于立差者，初术或又术须随意用之，至三乘差以上者，用又术为便，《括要算法》弧背术密用招差又术者也，可秘。"〔3〕这里的"初术"与"又术"即分别指累裁招差与浑沌招差。

图 4.3　有马赖徸的《拾玑算法》

正如安岛直圆所言，在《括要算法》贞卷"求弧背术"中，关孝和首次将招差法应用于弧长计算。已知圆直径 d 与矢 h（弦 a），求弧长幂 p^2。其演算过程中的四个步骤如下(为节省篇幅，未引用原文)：

〔1〕有馬頼徸. 拾璣算法[M]. 明和六年(1769)，江戸須原屋茂兵衛. 狩野 7.31413.5，索書号：ws001601 L006-02.

〔2〕安岛直圓. 招差捷術[A]. 平山諦，松岡元久編集. 安岛直圓全集[Z]. 東京：富士短期大学出版部，1983：122.

〔3〕加藤平左衛門. 和算ノ研究・雑論 I [M]. 日本学術振興会. 東京：丸善株式会社，1954：319.

(1) 用"割圆增约术"依次求 h 分别等于 $h_1 = 1$, $h_2 = 2$, $h_3 = 3$, $h_4 = 4$, $h_5 = 4.5$ 时之定弧背(弧长第一近似值)s_1, s_2, s_3, s_4, s_5。即用刘徽割圆弧术求出弓形内容 2^{13}、2^{14}、2^{15} 边小弦之折线长 s'_i, s''_i, s'''_i。再使用关孝和近似公式

$$s_i = s''_i + \frac{(s''_i - s'_i)(s'''_i - s''_i)}{(s''_i - s'_i) - (s'''_i - s''_i)} \tag{4.17}$$

求得定背 s_i ($i = 1, 2, \cdots, 5$)。相当于给出五个插值点 (h_i, s_i) ($i = 1, 2, \cdots, 5$)(图 4.4)。

(2) 求各报背(弧长的第二近似值序列)：$p_i = \dfrac{355}{113\pi^*} s_i$ ($i = 1, 2, \cdots, 5$)。

其中定周 $\pi^* = 3.141\,592\,653\,59$ 是关孝和经常使用的精密圆周率，而为使运算便利，又常使用分数形式的密率 $\pi = 355/113 = 3.141\,592\,92$。因此按上面运算，将定背 s_i 转化为报背 p_i。并求各限度 h_i/d，各弦幂 $a_i^2 = 4h_i(d - h_i)$，各离径 $d - 2h_i$。

背差以一萬六千三百八十四斜背與三萬二千七百六十八斜背差相乘之得數爲實列八千一百九十二斜背與一萬六千三百八十四斜背差內減一萬六千三百八十四斜背與三萬二千七百六十八斜背差餘爲法實如法而一得數加入一萬六千三百八十四斜背得

甲定背六寸四三五〇一一〇八四七九三二八三八六八

第三　求乙丙丁戊定背

矢二寸乙矢三寸丙矢四寸丁矢四寸五分戊依前術得各定背

乙定背九寸二七二九五二一八

丙定背一尺一寸五九二七九四八〇七三

丁定背一尺三寸六九四三八四〇六〇一

戊定背一尺四寸七〇六二八九〇五六三

第四　求甲乙丙丁戊限度報背弦冪及離徑

列各矢以徑約之得各限度〇列各定背以周率乘之得數爲列實列定周以徑率乘之得數爲法實如法而一得各報背〇列徑內減各矢餘以各矢相乘得數四之得各弦冪〇列徑內減倍各矢餘爲各離徑

甲　矢一寸限度一分弦冪三十六寸離徑八寸
　　報背六寸四三五〇一一六

乙　矢二寸限度二分弦冪六十四寸離徑六寸

Copyright 1998, Kyoto University Library

图 4.4　关孝和《括要算法》(1712)贞卷

弦幂法段数 $\alpha=113^2\times100$

矢幂法段数 $\beta=(355^2-4\times113^2)\times100$

矢幂法 $\lambda=\dfrac{355^2-4\times113^2}{113^2}=\dfrac{\beta}{\alpha}$

(3) 求各限度法 k_1，k_2，k_3，k_4，k_5：

① 求甲、乙、丙、丁、戊各较幂：

$$\Delta p_i^2=[4h_i(d-h_i)+\lambda h_i^2]-p_i^2=(a_i^2+\lambda h_i^2)-p_i^2\quad(i=1,2,3,4,5)$$

求得甲限度法 $$k_1=\frac{\Delta p_1^2(d-h_1)}{(d-2h_1)h_1^2}$$

② 求乙、丙、丁、戊各再乘较

$$\Delta^2p_i^2=\Delta p_i^2-\frac{k_1(d-2h_i)h_i^2}{(d-h_i)}\ (i=2,3,4,5)$$

求得乙限度法 $$k_2=\frac{\Delta^2p_2^2(d-h_2)^2}{(d-2h_2)h_2^2(h_2-h_1)}$$

③ 求丙、丁、戊各三乘较：

$$\Delta^3p_i^2=\Delta^2p_i^2-\frac{k_2(d-2h_i)h_i^2(h_i-h_1)}{(d-h_i)^2}\quad(i=3,4,5)$$

求得丙限度法 $$k_3=\frac{\Delta^3p_3^2(d-h_3)^3}{(d-2h_3)h_3^2(h_3-h_1)(h_3-h_2)}$$

④ 求丁、戊各四乘较：

$$\Delta^4p_i^2=\frac{\Delta^3p_i^2-k_3(d-2h_i)h_i^2(h_i-h_1)(h_i-h_2)}{(d-h_i)^3}\quad(i=4,5)$$

求得丁限度法 $$k_4=\frac{\Delta^4p_4^2(d-h_4)^4}{(d-2h_4)h_4^2(h_4-h_1)(h_4-h_2)(h_4-h_3)}$$

⑤ 求戊五乘较：

$$\Delta^5p_i^2=\Delta^4p_i^2-\frac{k_4(d-2h_i)h_i^2(h_i-h_1)(h_i-h_2)(h_i-h_3)}{(d-h_i)^4}\quad(i=5)$$

求得戊限度法

$$k_5 = \frac{\Delta^5 p_5^2 (d - h_5)^5}{(d - 2h_5)h_5^2(h_5 - h_1)(h_5 - h_2)(h_5 - h_3)(h_5 - h_4)}$$

对于这一步骤，后人颇觉费解，事实上，关孝和构造了下列形式的插值多项式：

$$\begin{aligned} P(h) = \alpha (d-h)^5 p^2 &= \beta (d-h)^5 h^2 + 4\alpha (d-h)^6 h - \\ & A(d-2h)h^2 (d-h)^4 + B(d-2h)h^2 (d-h)^3 (h-h_1) - \\ & C(d-2h)h^2 (d-h)^2 (h-h_1)(h-h_2) + \\ & D(d-2h)h^2 (d-h)(h-h_1)(h-h_2)(h-h_3) - \\ & E(d-2h)h^2 (h-h_1)(h-h_2)(h-h_3)(h-h_4) \end{aligned} \tag{4.18}$$

它等价于

$$\begin{aligned} p^2 = [\lambda h^2 + 4h(d-h)] - \frac{h^2(d-2h)}{(d-h)^5} & [k_1 (d-h)^4 - \\ & k_2 (d-h)^3 (h-h_1) + k_3 (d-h)^2 (h-h_1)(h-h_2) - \\ & k_4 (d-h)(h-h_1)(h-h_2)(h-h_3) + \\ & k_5 (h-h_1)(h-h_2)(h-h_3)(h-h_4)] \end{aligned} \tag{4.19}$$

显然，$A = k_1\alpha$, $B = k_2\alpha$, $C = k_3\alpha$, $D = k_4\alpha$, $E = k_5\alpha$。

当将 $h = h_1, h_2, h_3, h_4, h_5$ 依次代入式(4.19)时，便求得上述各限度法：k_1, k_2, k_3, k_4, k_5。这正是关孝和招差求弧关键之所在。

(4) 将插值多项式(4.18)展为 h 的级数：

$$P(h) = \alpha (d-h)^5 p^2 = m_0 + m_1 d^6 h + m_2 d^5 h^2 + \cdots + m_6 d h^6 + m_7 h^7 \tag{4.20}$$

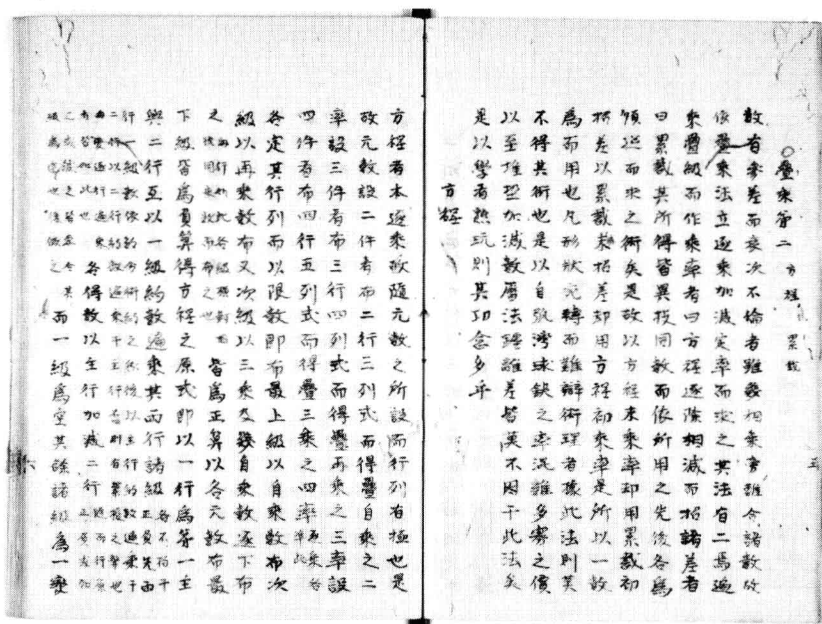
求其各项系数——第一、第二、…、第八率：$m_0, m_1, m_2, \cdots, m_6, m_7$。这里 $m_0 = 0$，而 $m_1 d^6, m_2 d^5, \cdots, m_6 d, m_7$ 便是定、平、立、…、五乘、六乘诸差。

可见关孝和使用了 Newton 形式的公式——浑沌式(4.18)。关孝和不仅没有使用“浑沌式”这一术语，而且也未语及“招差法”，因其招差过程比之于累裁招差法过于迂回，致使人们不易觉察其算理。此法鲜为人知的原因，除有马赖徸所说的“未行刊刻”和安岛直圆所说的“固吾门所

秘藏也”外，最主要原因恐怕正在于此。然而，谓鲜为人知亦不尽然，松永《垛叠招差新术》(1716)中的“招差新术”正是浑沌招差法。加藤平左卫门(Kato Heizaemon，1891～1976)认为松永良弼的“新术”近于Newton内插公式[1]，此论不够贴切。事实上，松永的招差过程与关孝和《括要算法》的弧背术的算法过程完全一致。松永的插值多项式实际是Newton内插公式(4.16)存在(0，0)点的形式，是中国历法的传统，到有马赖徸时发展成为(4.16)式。和算家最终目标是求(4.15)式，求出Newton公式(4.16)后，需转化为(4.15)式。

4.5 《大成算经》中的方程招差法

方程招差法详于《大成算经》(见图4.5)卷五，在关孝和的其他著述中未见有此招差法的记载，大概为建部贤弘所发明，其术文如下：


○疊乘第二　方程　累裁

數有參差而衰次不倫者雖數相乘專雖令諸數故依疊乘法立逐乘加減定率而求之其法有二焉逐乘疊級而作乘率者曰方程逐除相減而相諸差者曰累裁其所得皆異技同歸而依所用之先後各爲傾逆而求之術矣是故以方程末乘率即用累裁初招差以累裁契招差即用方程初乘率是所以一致爲而用也凡形狀究轉而難辯術理者據此法則莫不得其術也是以自弧灣球缺之率況雖多寡之儀以至推埋加減數層法殘難差皆莫不困于此法矣是以學者熟玩則其功念多乎

方程

方程者本逐乘故隨元數之所設而行列有極也是故元數設二件者布二行三列式而得疊自乘之二率設三件者布三行四列式而得疊再乘之三率設四件者布四行五列式而得疊三乘之四率各定其行列而以限數即布最上級以自乘數布次級以再乘數布又次級以三乘及幾自乘數逐下布之皆爲正算以各元數布最下級皆爲負算得方程之原式即以一行爲第一主與二行互以一級約數遍乘其兩行諸級各得數以主行加減二行而一級爲空其餘諸級爲一變

图4.5　建部贤弘等《大成算经》卷五[2]

---

〔1〕藤平左衛門. 和算ノ研究·雜論Ⅰ[M]. 日本学術振興会. 東京：丸善株式会社，1954.
〔2〕建部賢弘等. 大成算経[M]. 中集卷五. 叠乘第二. 京都大学附属図書館藏，索書号219316.

方程者本逐乘，故随元数之所设，而行列有极也。是故元数设二件者，布二行三列式，而得叠自乘之二率；设三件者，布三行四列式，而得叠再乘之三率；设四件者，布四行五列式，而得叠三乘之四率[逐乘各准此]。各定其行列，而以限数即布最上级，以自乘数布次级，以再乘数布又次级，以三乘及几自乘数逐下布之[每行如此，各级横对同号同乘数而布之也]，皆为正算，以各元数布最下级，皆为负算，得方程之原式〔1〕。

方程招差法是将各段限数 x_i 与相应的元积 $f(x_i)$ 依次代入 $f(x)=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n$ 得到一个关于系数 a_i 的线性方程组，上述术文描述的是列出以下系数矩阵：

$$\begin{pmatrix} x_n & x_{n-1} & \cdots & x_2 & x_1 \\ x_n^2 & x_{n-1}^2 & \cdots & x_2^2 & x_1^2 \\ x_n^3 & x_{n-1}^3 & \cdots & x_2^3 & x_1^3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_n^n & x_{n-1}^n & \cdots & x_2^n & x_1^n \\ -f(x_n) & -f(x_{n-1}) & \cdots & -f(x_2) & -f(x_1) \end{pmatrix} \tag{4.21}$$

于是，招差过程便是对式(4.21)进行初等变换过程。《大成算经》采用互乘相消的方法，将式(4.21)化为三角矩阵来求解。其术文如下：

即以一行为第一主，与二行互以一级约数遍乘其两行诸级[各不拘于正负，先两行一级数依约分术约之，然后以主行约数遍乘于二行，以二行约数遍乘于主行，否则有繁扰之弊也。每变逐行遍乘者，皆如此也。]各得数，以主行加减二行[随两行原正负或加之，或减之，皆要令其级为空也，后效之]，而一级为空，其余诸级为一变二行；又主行与三行互以一级约数遍乘，各得数，以主行加减三行，而一级为空，其余诸级为一变三行；亦主行与四行互以一级约数遍乘，各得数，以主行加减四行，而一级为空，其余诸级为一变四行；复主行与五行互以一级约数遍乘，各得数，以主行加减五行，而一级为空，其余诸级为一变五行；逐以主行对于原式诸行，遍乘、加减之、叠

〔1〕 加藤平左衛門. 和算ノ研究・雑論 I [M]. 日本学術振興会. 東京：丸善株式会社，1954：319.

逐行一级，而得一变式；次以一变式二行为第二主，与三行互以二级数遍乘其两行诸级，各得数，以主行加减三行，而二级为空，其余诸级为二变三行；又主行与四行互以二级数遍乘，各得数，以主行加减四行，而二级为空，其余诸级为二变四行；复主行与五行互以二级数遍乘，各得行如此，而得最上级率，为最初[直乘]乘率[乃以最上级为直乘率，以第二级为一次乘率，以第三级为二次乘率，以第四级为三次乘率，已上准此。然用招差，则以直乘率为定差，以一次乘率为平差，以二次乘率为立差，以三次乘率为三乘差，逐至最下级，为若干乘差而用之。若诸率有分者，依齐分术得通率及约法；带不尽者，遍进退其位，收弃尾数而整之也。]仍以所得之各乘率，顺求者，以限数乘直乘率，以限数自乘幂乘一次乘率，以限数再乘幂乘二次乘率，以限数三乘幂乘三次乘率，逐如此，以限数几乘幂乘最末[若干次]乘率，得数各依正负加减之，共得数以约法约之，得积；逆求者，以限数乘最末[若干次]乘率，加减前[几次]乘率，又乘限数，加减次前乘率，复乘限数，加减又次前乘率，逐如此，加减最初[直]乘率，而后乘限数，得数以约法约之，得积也〔1〕。

以上是和算最基本的三种招差法。

郭守敬三差公式采用了下列形式：

$$f(x)=[z_1+(\Delta_1^1-\Delta_1^2)]x+\frac{(\Delta_1^1-\Delta_1^2)-\dfrac{1}{2}\Delta_1^2}{l}x^2+\frac{\dfrac{1}{2}\Delta_1^2}{l^2}x^3$$

其中：日平差：$z_i=\dfrac{y_i}{x_i}$ 的一阶差分为 $\Delta_i^1=z_{i+1}-z_i$；其二阶差分为 $\Delta_i^2=\Delta_{i+1}^1-\Delta_i^1$；其步长为 $x_k=kl\ (k=1,2,3,4,5,6)$，沿袭了刘焯二次插值公式〔2〕，确定定差、平差、立差的三差的演算缺乏一般化与规范化的程式，为公式算法。

关孝和累裁招差法不仅将郭守敬的三差法发展为任意次的不等间距内插法，使招差方法一般化，而且还设计出“随减随除”求均差及逐次降阶的机械化程序，与今日差分算法相同，同时又获得了 Newton 形式的插值公式。

---

〔1〕 建部賢弘等. 大成算経[M]. 中集卷五. 叠乘第二. 京都大学附属図書館藏，索書号 219316.
〔2〕 曲安京、纪志刚、王荣彬. 中国古代数理天文学探析[M]. 西安：西北大学出版社，1994.

上文已经指出，中算招差法有两种算法来源，即整数论中的高阶等差数列求和与连续函数的数值逼近，因缺乏实数理论基础而一直不加区别。关孝和对郭守敬方法的推进导致建部贤弘沟通了招差法与古代方程术的联系，强化了招差法作为待定系数法的意义与作用。于是，从待定系数法意义上看，累裁招差、浑沌招差、方程招差的差别仅在于对式(4.21)进行初等变换方式的不同：累裁招差通过依次遍除 x_i 及各乘积法：$x_{i+k}-x_i(i=1, 2, \cdots, n-1)$，以使第 $k+1$ 行全变为1再行相消而化为三角矩阵；浑沌招差法则是首先将第一行首位化为1，再分别乘他行首位与之相减，逐步消去首位而化成三角矩阵；而方程招差则是通过互乘相消化为三角矩阵。

4.6　关孝和浑沌招差法的思想来源

招差法不仅是待定系数法，也是函数数值逼近算法，和算家认识到了这一点，建部在《大成算经》卷五"论招差法"中说：

> 凡形状宛转而难辨术理者，据此法则莫不得其术也，是以自弧湾球缺之率、混杂多寡之价，以至堆垛加减数、历法躔离差，皆莫不因于此法矣[1]。

首先是关孝和大胆地将招差法应用于弧长计算，从今村知商(Imamura Chishyo, 1591? ～1668)的弧幂公式

$$p^2=(\pi^2-4)h^2+a^2=\lambda h^2+4h(d-h)\quad (h=r\text{时为准确公式})$$

出发，构造了 Newton 插值多项式(4.19)以逼近 p^2。这一开拓性工作，引导建部贤弘以及宅间流算家镰田俊清(Kamada Toshikiyo, 1678～1744)在其基础上建立了三角函数的无穷幂级数展开的研究(其具体做法见本书第10章)，将和算圆理算法推向微积分方法，在数学史上具有十分重要的意义。

那么，关孝和招差法成就是如何形成的呢？他伟大创造的思想基础

---

〔1〕 建部賢弘等. 大成算経[M]. 中集卷五. 叠乘第二. 東北大学附属図書館藏，登録番号：ws001050，索書号：450.

何在?

我们首先来考察日本历学家对郭守敬三差法的应用情况。涉川春海《贞享历》所给的太阳中心差公式为

盈初缩末(限数 89 日):

$$f_1(x) = a_1x + b_1x^2 + c_1x^3 = 4\ 360\ 000x - 2\ 000x^2 - 34x^3$$

缩初盈末(限数 93 日):

$$f_2(x) = a_2x + b_2x^2 + c_2x^3 = 4\ 199\ 800x - 2\ 000x^2 - 31x^3$$

关于三差 a_i, b_i, c_i的确定方式,涉川春海的弟子谷秦山(Tani Shinzan, 1663～1718)在《壬癸录》中称:"立差、平差,设算法耳,非有实数也,定差即初限之差。"意思说,定差 a_i是初限之积差,由实测得到,而立差 c_i与平差b_i是以算法推算出来的。具体算法,西村远里(Nishimura Towosato, 1718～1787)在《贞享历》卷九中述道:

> 求之,察春海术,置极差二度〇五六五〇四,以八十九限除之,得二百三十一分〇六八弱,以减定差,余得二百〇(四分)九十三秒二,以八十九限除之,得二分三十〇秒二六强,以减定差,余得二百〇九十三秒二,豫立差三十四微[大略依授时历也],以八十九限乘之,得三十六秒二六,以减寄位,内余为平差二分,缩初盈末依之〔1〕。

就是说,太阳中心差极大值 $\delta = 2.056\ 504$ 度 $= 20\ 565.04$ 分与定差 $a_1 = 436$ 分,均由实测获得,立差 $c_1 = 0.003\ 4$ 既非实测,又非算出数据,而直接参照引用授时历的立差近似数据(授时历为 0.003 1),由此推算出平差 $b_1 = (a_1 - \delta \div 89) \div 89 - 89c_1$。

我们从这里可以看出,日本历家在日躔月离计算时,不再像《授时历》那样构造三阶差分表来确定三次插值多项式,而是直接利用《授时历》的多项式插值函数,根据日本的实测来修正多项式系数,同时他们也认识到"招差术无定法"〔2〕。

关孝和将招差法应用于弧长计算也并非偶然,从历家的议论中可窥见

〔1〕 佐藤政次. 暦学史大全[M]. 東京: 駿河台出版社,1968: 272.
〔2〕 佐藤政次. 暦学史大全[M]. 東京: 駿河台出版社,1968: 272.

这种萌芽。涩川春海在《新芦面命》中称：

月之立成，《授时历》也仅八十四限也，不合，《宣明》立成似呈八角形，不成功，我用数十年之功，立平、立差，完全成功了[1]。

《壬癸录》据此以图4.6示意，并说道：

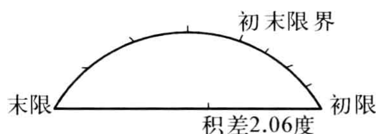


图4.6

盈缩一限积为天度五分以下，终限极于极差，但缩初盈末限数多，故比盈初缩末之积，其数少，此长引之算法也。如均除极差，每限有定分，则是勾股弦之法也，此立成，每限有些少差数，而一百八十二度之间，极于二度奇之圆斜，此非天之圆，只渐渐消息其差而始终均合之法也，三乘之术由此而作，非勾股弦所能尽也[2]。

事实上，太阳运动是椭圆运动，中心差函数并非简单的代数函数与三角函数，所以谷秦山的圆弧描述只是简单的示意，故谓"非天之圆，只渐渐消息其差"。按照中算传统，当数量关系不能以比率(线性)关系或勾股关系来描述时，常以弧矢关系(圆函数)来描述。由此可以说明，将招差法应用于圆弧计算则是十分自然的构想。

同时考察明代算书，发现上述思想是郭守敬三百后历算家对招差法的普遍认识。柯尚迁(16世纪)在《数学通轨》中记叙了顾应祥(1483～1565)与唐顺之(1507～1560)的一段对话，其中唐说：

郭太史历数冠绝古今，然其作法孔窍亦只有两事，其步日躔源头在截矢求弦一法，仆既作为弧矢论以请于明公，而公亦既演之为书矣；其步月躔源头在容弧直阔一法，今亦偶然会意而得之，并书之[3]。

庞嵩在顾应祥的《测圆算术》后序也称：

……又越数月，翁复示测圆算术一编，详说反约，洞发肯启，即近可以知远观要，可以尽博天地之高深，日月星辰之躔度，元会岁历之始终，

---

〔1〕 佐藤政次. 暦学史大全[M]. 東京：駿河台出版社，1968：272.

〔2〕 谷秦山. 壬癸録[M]. 卷四. 转引自佐藤政次. 暦学史大全[M]. 東京：駿河台出版社，1968：272.

〔3〕 柯尚迁. 数学通轨[A]. 郭书春主编. 中国科学技术典籍通汇·数学卷[Z](二). 郑州：河南教育出版社，1993：2-1211.

莫之能违也[1]。

顾应祥《方圆论说》则称：

> 历家以径一围三立法，则其数似犹未精，然郭守敬之历至今行之无弊，何也，曰历家以万分为度，秒以下皆不录，纵有小差，不出于一度之中，况所谓黄赤道弧背度，乃测验而得，止以径一围三定其平差立差耳[2]。

这些言论主要是围绕顾应祥的弧矢论，提供了两种信息：① 收录《方圆论说》的《算法统宗》与《数学通轨》传到了日本，那么关孝和是否受到顾应祥的上述言论的启发而发想以招差法求弧长呢？② 如果顾应祥、唐顺之的观点正确并且符合历史实际的话，那么就为解释古代插值方法的立术之原提供了一种新的思路，而且也为祖冲之插值法求圆周率说提供了一个佐证，而实际上和算圆理就是按这一假说发展的。这是一个有待深入研究的有趣的课题。

直至清代江永(1681～1762)仍有同样的认识，他在《数学》卷八中说：

> 三差法求七政盈缩，固巧矣，愚窃谓其数之不真，凡圆体参差，截为数段，前后相较，其畸零之数无时而尽，今以段日除积度相较，至再而即齐同，无是理也，……平圆中亦无此差率也，以至圆之体而欲以平方立方之差求之，圆凿方枘，岂能相入哉[3]。

其次，考察早期和算著作，发现关孝和以浑沌招差法求弧长的算法思想与礒村吉德(Isomura Yoshitoku，？～1711)对球和圆的公式进行检验的方法也有相似之处。

礒村吉德在《算法阙疑抄》(1660)卷三中常以有限分割进行近似计算以检验圆的计算公式。在检验《竖亥录》的球冠体积公式 $U=\dfrac{dpa}{6.2}-\dfrac{\left(\dfrac{d}{2}-h\right)pa}{3.1}$ 时，在 $d=10$ 的圆中，检验如下：

---

[1] 庞嵩.测圆算术后序[A].郭书春编.中国科学技术典籍通汇·数学卷[Z](二).郑州：河南教育出版社，1993：2-1140.

[2] 顾应祥.弧矢算术[A].郭书春编.中国科学技术典籍通汇·数学卷[Z](二).郑州：河南教育出版社，1993：2-1082.

[3] 江永.数学[M]卷八.丛书集成本.北京：商务印书馆，1936：386.

$h_1=2$，$a_1=6$ 时，公式结果 $U_1=14.6608$，试验结果 $U_1=14.6608$；

$h_2=2$，$a_2=8$ 时，公式结果 $U_2=54.4544$，试验结果 $U_2=54.4544005236$；

$h_3=3$，$a_3=2\sqrt{21}$ 时，公式结果 $U_3=113.0976$，试验结果 $U_3=113.097607854$；

$h_4=4$，$a_4=2\sqrt{24}$ 时，公式结果 $U_4=184.3072$，试验结果 $U_4=184.3071$。

在该书卷五中，以同样的方式检验弧矢弦的公式。这种逐次试验法在思想上与招差法具有相似性。

4.7　和算中招差法的各种应用

关孝和将《授时历》的三差法推广为具有一般性的招差术之后，它作为求多项式系数的待定系数法，被和算家灵活处理并应用于各类数学问题，关孝和之后的和算书中大都有招差术内容。和算家根据招差法使用的场合与招差方式命以不同名称。如有马赖僮著《招差三要》(1764)，主要有“方程招差”、“奇零招差”和“累约招差”。其“方程招差”同于《大成算经》中的“方程招差法”，其所谓的“奇零招差”，是指在元积 $f(x_i)$ 为奇零数情形的招差法。所谓的“累约招差”，则是招差法应用于累约术或剪管术问题[1]，如自变量为自然数的多项式 $dy=ax+bx^2+cx^3$，如果给出条件 (x_1,y_1) 与 (x_2,y_2)，并且 $a=b+t$，以求 a,b,c,d。由 $dy=ax+(a-t)x^2+cx^3$，解得 $dy=ax+(a-t)x^2+cx^3$，即 $dy+tx^2=a(x+x^2)+cx^3$，将 (x_1,y_1)，(x_2,y_2) 代入得

$$dy_1+tx_1^2=a(x_1+x_1^2)+cx_1^3$$
$$dy_2+tx_2^2=a(x_2+x_2^2)+cx_2^3$$

消去 c 得 $(dy_1+tx_1^2)x_2^3-(dy_2+tx_2^2)x_1^3=a(x_1+x_1^2)x_2^3-a(x_2+x_2^2)x_1^3$

〔1〕 关于和算的累约术与剪管术，详见本书第 6 章。

即 $d[y_1x_2^3 - y_2x_1^3] - a[(x_1 + x_1^2)x_2^3 - (x_2 + x_2^2)x_1^3] + (tx_1^2x_2^3 - tx_2^2x_1^3) = 0$

对此关于 d, a 的不定方程，利用累约术求出 d 与 a，从而求出 b 与 c。

有马赖僮在《拾玑算法》中又给出"双钓招差"，所谓的"双钓招差法"，就是以待定系数法确定分式 $y = \dfrac{a + bx + cx^2}{m + nx + lx^2}$ 的系数，其中分子系数 a, b, c 依次称作右直、右定、右平，分母系数 m, n, l 依次称作左直、左定、左平。招差方法基本上是解方程组确定系数 a, b, c, m, n, l。后来，关流数学家安岛直圆的著作有记载，并且有石黑信由(1760～1836)的《双钓招差》(1804，抄本)传世。

最上流和算家会田安明(Aida Yasuaki, 1747～1817)的《算法招差法》是关于招差法的专著，书中介绍了累裁招差法、脱差法、方程招差法、浑沌招差法、直差法、反复招差法、乘除加减招差法、分合招差法、极差法或消长招差法、混交招差法等各类招差法，其累裁招差法、方程招差法、浑沌招差法与关流方法及名称是一致的。其"脱差法"类似于方程招差，"直差法"即插值多项式包括直差的招差法。其所谓的"极差法"或"消长招差法"的演算有点特别。对于插值多项式

$$y = f(x) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n,$$

若给定 n 个插值节点$(x_i,\ y_i)$，求出系列差商：

$$\frac{y_1}{x_1} = p_{1,0} \quad \frac{y_2}{x_2} = p_{1,1} \quad \frac{y_3}{x_3} = p_{1,2} \quad \frac{y_4}{x_4} = p_{1,3} \quad \frac{y_5}{x_5} = p_{1,4} \quad \cdots$$

$$\frac{p_{1,0} - p_{1,1}}{x_1 - x_2} = p_{2,0} \quad \frac{p_{1,0} - p_{1,2}}{x_1 - x_3} = p_{2,1} \quad \frac{p_{1,0} - p_{1,3}}{x_1 - x_4} = p_{2,2} \quad \frac{p_{1,0} - p_{1,4}}{x_1 - x_5} = p_{2,3} \quad \cdots$$

$$\frac{p_{2,0} - p_{2,1}}{x_2 - x_3} = p_{3,0} \quad \frac{p_{2,0} - p_{2,2}}{x_2 - x_4} = p_{3,1} \quad \frac{p_{2,0} - p_{2,3}}{x_2 - x_5} = p_{3,2} \quad \frac{p_{2,0} - p_{2,4}}{x_2 - x_6} = p_{3,3} \quad \cdots$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$\frac{p_{n-1,0} - p_{n-1,1}}{x_{n-1} - x_n} = p_{n,0}$$

如果从 x_1, x_2, x_3, $\cdots$, x_{n-1}, x_n元素中可以重复地选取 k 个元素进行相乘，其和记作 H_n^k，如 $H_2^1 = x_1 + x_2$，

$$\begin{aligned} H_4^3 = {} & x_1^3 + x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_1^2x_4 + x_2^3 + x_2^2x_1 + x_2^2x_3 + x_2^2x_4 + \\ & x_3^3 + x_3^2x_1 + x_3^2x_2 + x_3^2x_4 + x_4^3 + x_4^2x_1 + x_4^2x_2 + \\ & x_4^2x_3 + x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 \end{aligned}$$

会田安明求各差 a_i 的演算如下：

$a_n = p_{n,0}$

$a_{n-1} = p_{n-1,0} - a_n H_{n-1}^1$

$a_{n-2} = p_{n-2,0} - a_{n-1} H_{n-2}^1 - a_n H_{n-2}^2$

$a_{n-3} = p_{n-3,0} - a_{n-2} H_{n-3}^1 - a_{n-1} H_{n-3}^2 - a_n H_{n-3}^3$

$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$

$a_2 = p_{2,0} - a_3 H_2^1 - a_4 H_2^2 - a_5 H_2^3 - \cdots - a_{n-1} H_2^{n-3} - a_n H_2^{n-2}$

$a_1 = p_{1,0} - a_2 H_1^1 - a_3 H_1^2 - a_4 H_1^3 - \cdots - a_{n-1} H_1^{n-2} - a_n H_1^{n-1}$

这种算法并不比关孝和累裁招差法简单。

会田安明的“混交招差法”，其实也属于“方程招差法”，例如，对于 $y = f(x) = a_1 x + a_2 x^2$，若插值节点为 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，则解方程组

$$\begin{cases} -y_1 + a_1 x_2 + a_2 x_1 x_2 = 0 \\ -y_2 + a_1 x_1 + a_2 x_2 x_1 = 0 \end{cases}$$

获得定差 a_1 与平差 a_2。

对于三次插值多项式 $y = f(x) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$，若插值节点为 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，(x_3, y_3)，则解方程组

$$\begin{cases} -y_1 + a_1 x_3 + a_2 x_2 x_3 + a_3 x_1 x_2 x_3 = 0 \\ -y_2 + a_1 x_1 + a_2 x_3 x_1 + a_3 x_2 x_3 x_1 = 0 \\ -y_3 + a_1 x_2 + a_2 x_1 x_2 + a_3 x_3 x_1 x_2 = 0 \end{cases}$$

获得定差 a_1，平差 a_2 与立差 a_3。

会田安明与关流算家对立，标新立异地刻意设计一些算法区别于关流算法，其实其消长招差法、混交招差法等算法，在机械性、程序化方面还不如关流算法。

本章小结

明清时期招差法一直没有失传，但在中国的发展十分微弱，算学研究昌盛的清代，对招差法的研究也很稀少。清初黄鼎《天文大成管窥辑要》(1652)仅叙招差法内容，与《元史・律历志》所载基本一致，唯有惊叹“最为

奇捷"而已[1],没有深入研究,一般认为它是和算家摄取招差法方法的主要来源。称得上研究的只有清初梅文鼎的《授时平立定三差详说》与清末李善兰的《麟德术解》。梅文鼎以垛积术图解招差法原理,没有作任何推广与应用,而李善兰试图以几何方法解释招差法的造术原理[2],也没有推广与创新。直至清末华蘅芳的《积较术》才推广成一般化的差分算法。那么,在相同的算法传统下,什么原因造成中日招差法发展的不同结果呢?笔者认为主要存在以下两方面原因:

(1) 三角函数于明末开始传入中国,制历开始采用西法,无需再用招差法推算日月五星的运动,如江永所说:

> 使平立定三差之果符天运,则八线亦可不立,既有八线之精算,为一切测圆之准绳,则此处更无歧途别径,亦无取乎三差之巧矣[3]。

收入八线表的《天学初函》与梅文鼎《历算全书》输入日本是关孝和改进招差法以后的事,和算只有沿循传统而利用招差法。

与此同时,在西学东渐的学术环境中,中国学者也不能以积极的态度对待传统算法。正如江永所说:"于古人之法,深究其根,存而不用可也。"[4]一方面"深究其根",沉湎于对传统算学的文字义理的阐释,梅文鼎的垛积解释与李善兰的几何解释正是这种表现,另一方面是"存而不用",在数学实践上缺乏对古典算法的应用。非独招差术,其他古典算法的发掘与整理都有这样的表现,反映出清代数学的解释性特征。这种研究陋习,很难推陈出新。与和算家将招差法应用与圆理及垛积求和的数学应用相比,可谓相形见绌。

(2) 在天元术的基础上建立了点窜术的代数方法,导致以多项式演算为中心的和算代数学的发达,从而推动了也作为多项式理论的一部分的招差法的向前发展。与此相反,清代数学一直没有形成符号化代数方法,语言代数客观地制约着多项式理论的进一步发展。

通过《授时历》,中国传统的招差法传入了日本,随着和算代数方法的发

---

〔1〕 関孝和. 関訂書[A]. 平山諦,下平和夫,広瀬秀雄編. 関孝和全集[Z]. 大阪:大阪教育図書株式会社,1974:446.

〔2〕 大橋由紀夫. 隋唐時代の補間法の算術起源[J]. 科学史研究,1994,33(2):15.

〔3〕 江永. 数学[M],卷八,丛书集成本. 北京:商务印书馆,1936:387.

〔4〕 江永. 数学[M],卷八,丛书集成本. 北京:商务印书馆,1936:388.

达，和算家对其作了一般性的推广，演变为具有普遍意义的待定系数法。同时在明代弧矢论思想的启发下，将其作为有效的数值逼近法应用于弧长计算，引导和算向无穷级数研究领域迈进。与此相对照，在清代，由于招差法研究缺乏实际应用并且缺乏代数方法，所以梅文鼎、李善兰对招差法的研究都囿于“究古人之意”而不能推陈出新，于此一端可见传统算法在中日数学发展中之不同遭遇。

第 5 章

级数求和算法：垛积术

若级数相邻项之差为常数，则该级数称作等差级数。若其差仍非常数，其差也构成一个等差级数，则原级数称作 2 阶等差级数。仿此，可定义 3 阶、4 阶、……的等差级数。2 阶以上的等差级数，被称作高阶等差级数。

对于函数 $f(x)$，我们定义“差分算子”Δ 如下：

$\Delta f(x)=f(x+1)-f(x)$，$\Delta^k f(x)=\Delta(\Delta^{k-1} f(x))$，$k\geqslant 2$（对 $k\geqslant 1$，$\Delta^k f(x)$ 表示对 $f(x)$ 重复实施 k 次 Δ(运) 算子)，并令 $\Delta f(x)=f(x)$，则 Δ 为一线性算子，也就是

$$\Delta(\alpha f(x)+\beta g(x))=\alpha\Delta f(x)+\beta\Delta g(x)\ (\alpha,\ \beta \text{为常数}) \tag{5.1}$$

这一关系不难证明，它表明，有限多个高阶等差级数的整系数线性组合，必然也是高阶等差级数，而且其阶数与最高阶数相同。

据此易推得以下关系：

$$\begin{aligned}
f(x+1) &= f(x)+\Delta f(x)\\
f(x+2) &= f(x+1)+\Delta f(x+1)\\
&= [\,f(x)+\Delta f(x)]+\Delta(f(x)+\Delta f(x))\\
&= f(x)+2\Delta f(x)+\Delta^2 f(x)\\
&\cdots\cdots\cdots\\
f(x+n) &= f(x+n-1)+\Delta f(x+n-1)
\end{aligned}$$

由此可以解决任意类型的高阶等差级数的求和问题。

因为若 $f(x)$ 为一个 k 阶等差级数，令 $f(0)=0$，则由差分运算：

$$\Delta f(0) = f(1) - f(0) = a_1$$

$$\Delta f(1) = f(2) - f(1) = a_2$$

$$\cdots\cdots$$

$$\Delta f(n-1) = f(n) - f(n-1) = a_n$$

$$\Delta^2 f(0) = f(2) - 2f(1) + f(0) = a_2 - a_1$$

$$\Delta^2 f(1) = f(3) - 2f(2) + f(1) = a_3 - a_2$$

$$\cdots\cdots$$

$$\Delta^2 f(n-2) = a_n - a_{n-1}$$

$$\cdots\cdots$$

可知

$$\Delta^{k+1} f(0) = \Delta^{k+1} f(1) = \Delta^{k+1} f(2) = \cdots = \Delta^{k+1} f(n-(k+1))$$

及

$$\Delta^{k+2} f(0) = \Delta^{k+2} f(1) = \Delta^{k+2} f(2) = \cdots = \Delta^{k+2} f(n-(k+2)) = 0$$

同理，有　$\Delta^{k+j} f(0) = 0$。

由此可求 k 阶等差级数的和，即

$$S_n = C_n^1 a_1 + C_n^2 \Delta a_1 + C_n^3 \Delta^2 a_1 + \cdots + C_n^{k+1} \Delta^k a_1 \tag{5.2}$$

中国古代的垛积术实为高阶等差级数求和问题，它与有限差分算法(招差术)是互逆算法。垛积问题自《九章算术》发其端，在中国古代数学中自成系统。元代朱世杰总结了古代数学家在这方面的研究成果，解决了任意类型的高阶等差级数的求和问题。

5.1　中国古代的垛积术

数列问题最早出现于《九章算术》，其"衰分章"的"分鹿问题"和"女子善织"问题均涉及数列。"分鹿问题"如下：

今有大夫、不更、簪裛、上造、公士，凡五人，共猎得五鹿。欲以爵次

分之，问各得几何？

答曰：大夫得一鹿、三分鹿之二；不更得一鹿、三分鹿之一；簪裹得一鹿；上造得三分鹿之二；公士得三分鹿之一。

术曰：列置爵数，各自为衰，副并为法，以五鹿乘未并者，各自为实，实如法得一鹿[1]。

该题所涉为5,4,3,2,1的等差数列，其算法为

$$\frac{5i}{\sum_{i=1}^{5} i} \quad (i=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$$

“女子善织”问题如下：

今有女子善织，日自倍，五日织五尺。问日织几何？

答曰：

初日织一寸、三十一分寸之十九。

次日织三寸、三十一分寸之七。

次日织六寸、三十一分寸之十四。

次日织一尺二寸、三十一分寸之二十八。

次日织二尺五寸、三十一分寸之二十五。

术曰：置一、二、四、八、十六为列衰，副并为法，以五尺乘未并者，各自为实，实如法得一尺[2]。

该题所涉为1,2,4,8,16的等比数列，其算法与上题相似。

《九章算术》“均输章”还给出了简单的求等差数列和的问题。随后，《张丘建算经》(5世纪)给出了等差级数求和的公式：

$$\sum_{r=1}^{n} r = \frac{1}{2}n(n+1)$$

对高阶等差级数的研究始于北宋的沈括(1031～1095)，他在《梦溪笔谈》卷十八中提出了所谓的“隙积术”：

---

〔1〕九章算术[A].郭书春主编.中国科学技术典籍通汇·数学卷[Z].第1册.郑州：河南教育出版社，1993：1-121.

〔2〕九章算术[A].郭书春主编.中国科学技术典籍通汇·数学卷[Z].第1册.郑州：河南教育出版社，1993：1-122.

隙积者，谓积之有隙者，如累棋、层坛及酒家积罂之类，虽以覆斗，四面皆杀，缘有刻缺及虚隙之处。用刍童法求之，常失于数少，予思而得之，用刍童法为上行，下行别列下广，以上广减之，余者以高乘之，六而一，并入上行[1]。

术文意思是：堆垛的上底宽是 a 个物体、长是 b 个物体、下底宽是 c 个物体、长是 d 个物体、高是 n 层，垛积（物体个数）为 S，则垛积 S 比上底宽是 a、长是 b、下底宽是 c、长是 d、高是 n 的长方棱台的体积多 $\frac{n}{6}(c-a)$，即

$$S = ab+(a+1)(b+1)+(a+2)(b+2)+\cdots+cd$$
$$= \frac{n}{6}[(2b+d)a+(2d+b)c]+\frac{n}{6}(c-a)$$

继沈括之后，杨辉在《详解九章算法》（1261）中也讨论了垛积问题，给出三种高阶等差级数求和公式：

四隅垛：$\sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{n}{3}(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right)$

方垛：$\sum_{r=1}^{n} (a+r)^2 = \frac{n}{3}\left(a^2+d^2+ad+\frac{d-a}{2}\right)$， 其中 $a+n=d$

三角垛：$\sum_{r=1}^{n} \frac{r(r+1)}{2!} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}$

杨辉将这三个公式分别与《九章算术》中的方锥、方亭、鳖臑的体积公式进行比类，以说明这些公式可以仿照刘徽《九章算术注》中的棋验法以几何方式推导出来。

元代朱世杰在其《四元玉鉴》（1303）中对垛积问题进行了系统研究，该书的卷中第七“茭草形段门”和卷下第一“果垛累积门”给出了垛积的一般化公式，使中国古代垛积问题臻于完备。《四元玉鉴》所载高阶等差级数求和的系列公式包括：

1）茭草垛（等差数列）

$$\sum_{r=1}^{n} r = \frac{1}{2!}n(n+1)$$

[1] 沈括. 梦溪笔谈[M]. 卷十八. 四库全书本.

2）三角垛(二阶等差数列)

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{r(r+1)}{2!}=\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}$$

3）撒星形垛(三阶等差数列)

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{r(r+1)(r+2)}{3!}=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4!}$$

4）三角撒星形垛(四阶等差数列)

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{r(r+1)(r+2)(r+3)}{4!}=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5!}$$

5）三角撒星更落一形垛(五阶等差数列)

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)}{5!}=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(r+5)}{6!}$$

上述系列公式中，三角垛的通项是菱草垛的和式，撒星形垛的通项是三角垛的和式，其规律是，以高阶等差级数的和为新级数的一般项，以求新的高阶等差级数的和。其“落一形垛”、“更落一形垛”的名称表明，前式的 r 项和是后式的第 r 项，即前式中到第 r 层为止的垛积降落一层，便是后式垛积的第 r 层。根据以上系列公式，可以把朱世杰的垛积公式归纳为一般的三角垛系统：

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{r(r+1)(r+2)\cdots(r+p-1)}{p!}=\frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+p)}{(p+1)!} \tag{5.3}$$

朱世杰还讨论了以等差级数 $\sum_{r=1}^{n}r$ 的和式、二阶等差级数 $\sum_{r=1}^{n}r^2$ 的和式分别为两个新级数的一般项的情形。在前一情形中，获得公式

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{r(r+1)}{2!}=\frac{n(n+1)(n+2)}{3!} \tag{5.4}$$

在此基础上不断以和式为下一级数的一般项，得到第一类高阶等差级数(三角垛系统)的一般公式(5.3)，在后一情形中，获得公式

$$\sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{1}{3!} n(n+1)(2n+1)$$

朱世杰不断以其和式为新级数的一般项，于是得到系列公式

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{r(r+1)(2r+1)}{3!} = \frac{2}{3} \sum_{r=1}^{n} \frac{r(r+1)}{2!} r + \sum_{r=1}^{n} \frac{r(r+1)}{2!} \tag{5.5}$$

从而引出形如 $\sum_{r=1}^{n} \frac{r(r+1)}{2!} r$ 的高阶等差级数，即岚峰形垛系统，其一般形式的求和公式为

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{r(r+1)(r+2)\cdots(r+p-1)}{p!} r = \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+p)}{(p+2)!} [(p+1)n+1] \tag{5.6}$$

另外，从《四元玉鉴》所用“古法七乘方图”[1]（图 5.1）可以看出，第一组的级数恰好是从左边开始的第 $p+1$ 条斜线的数字的延伸，第 p 条斜线上最初 n 个数字的和恰好等于第 $p+1$ 条斜线上的第 n 个数。因此，认为朱世杰的第一组级数很可能就是直接从这个图得到的，这不是没有道理的。他虽然只算到 $p=6$ 的情形，但是很明显，p 是任何正整数的时候都成立。



图 5.1 《四元玉鉴》中的“古法七乘方图”

至于第二组级数怎样得出，朱世杰同样没有说明，很可能也是通过推广的“古法七乘方图”求得的。如把朱世杰的“古法七乘方图”的各斜行列成数列，则其

第 1 斜行的前 n 个数目和为 $\sum_{k=1}^{n} 1 = n$

第 2 斜行的前 n 个数目和为

$$0 + \sum_{k=2}^{n} (k-1) = \frac{1}{2!} n(n-1)$$

〔1〕 朱世杰. 四元玉鉴[M]. 宛委别藏本. 南京：江苏古籍出版社，1988.

第 3 斜行的前 n 个数目和为

$$0+0+\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{2!}(k-1)(k-2)=\frac{1}{3!}n(n-1)(n-2)$$

第 4 斜行的前 n 个数目和为

$$0+0+0+\sum_{k=4}^{n}\frac{1}{3!}(k-1)(k-2)(k-3)=\frac{1}{4!}n(n-1)(n-2)(n-3)$$

恰好符合三角垛公式(5.3),并为朱世杰招差公式

$$f(n)=n\Delta+\frac{1}{2!}n(n-1)\Delta^2+\frac{1}{3!}n(n-1)(n-2)\Delta^3+\frac{1}{4!}n(n-1)(n-2)(n-3)\Delta^4 \quad (5.7)$$

的第一、二、三、四项系数。

公式的系数恰好是“古法七乘方图”从左边开始的斜线的数字的和,把公式推广到一般情况并不困难。因此,可以认为朱世杰由“古法七乘方图”导出其三角垛系统。

朱世杰的《算学启蒙》也载有大量的垛积知识,其“堆积还原门”中涉及的垛积包括:茭草、圆箭、三角垛、四角垛等系统。此外,杨辉的《田亩比类乘除捷法》(1275)中也有圭垛、梯垛、圆箭、方箭的问题,其《算法通变本末》(1274)中也有三角垛、四隅垛问题。这两本宋元数学书是和算垛积术知识的直接来源。

5.2 关孝和的垛积术

垛积知识因宋元数学著作在明代的失传而在中国一度被冷落,它通过《算学启蒙》、《杨辉算法》在日本传播而被和算家所接受,并对和算的代数学与无穷小分析的发展产生重要作用。江户初期的和算书中零散地出现一些数列求和问题,如《新编尘劫记》(吉田光由,1697)中的“鼠算”[1],《算法阙疑抄》(礒村吉德,1660)中的求等比数列、等差数列和问题,这些问题又出现

〔1〕 类似于斐波那契的“兔子问题”。

于《改算记》(山田正重，1659)、《算俎》(村松茂清，1663)、《古今算法记》(泽口一之，1671)等书中，但都不是一般性的算法公式。

关孝和是第一位系统研究垛积术的和算家，其垛积术研究成果被弟子们概括在《括要算法》(1712)和《大成算经》(1711)中，《括要算法》元卷"垛积术解"中包含"方垛"与"衰垛"两种类型的垛积公式，所谓方垛(又称作乘方垛)，即 $S_p = \sum_{r=1}^{n} r^p$ 系列，今天常谓之为幂和公式；所谓衰垛，指 $S_n = \sum_{r=1}^{n} \binom{r+p-1}{p} = \binom{n+p}{p+1}$ 系列。衰垛系列在《算学启蒙》、《杨辉算法》中均已出现，而乘方垛系列在宋元数学中只出现平方垛，而没有出现一般形式。

在方垛部分，关孝和首先给出 $p=1, 2, 3, 4, 5, \cdots$ 的一系列公式：

> 圭垛演段：置基数，自乘之，得数与一个相消，得式。置圭垛原法二，内减一级数[一个]，余一为实。以二级数[二个]为法、实如法而一，得二分之一，为加，是逐乘二级之取数也。
>
> 平方垛演段：置基数，再自乘之，得数与一个相消，得式。置二级数[三个]，取二分之一得[一个二分个之一]，一级数[一个]、二位相并，共得[二个二分个之一]、通分内子，得五、寄位。置平方垛原法三，以分母二相乘，得六[自寄位数多者，为加，少者，为减，后仿之]、内减寄位、余一为实。置三级数[三个]，以分母二相乘，得六为法。实如法而一，得六分之一，为加、是逐乘三级之取数也。
>
> 立方垛演段：置基数，三自乘之，得数与一个相消，得式。置二级数[四个]，取二分之一，得[二个]。置三级数[六个]，取六分之一，得[一个]、一级数[一个]，三位相并，共得[四]，寄位。置立方垛原法四，内减再寄，恰尽，故四级之取数，空也。
>
> 三乘方垛演段：置基数，四自乘之得数，与一个相消，得式。置二级数[五个]，取二分之一，得[二个二分个之一]。置三级数[一十个]，取六分之一，得[一个三分个之二]、四级取数空、一级数一个，三位以遍通术求同分母六、通分内子，得三十一、寄位。置三乘方垛原法五、以分母六相乘、得三十，以减寄位、余一为实。置五级数[五个]，以分母六相乘，得三

十为法、实如法而一，得三十分之一，为减、是逐乘五级数取数也。

四乘方垛演段：置基数，五自乘之，得数与一个相消，得式。置二级数[六个]，取二分之一得[三个]。置三级数[一十五个]，取六分之一得[二个二分个之一]。四级取数空、一级数[一个]，三位相并，共得[六个二分个之一]，寄位。置五级数[一十五个]，取三十分之一，得[二分个之一]，以减寄位，余六个再寄。置四乘方垛原法六，内减再寄，恰尽，故六级之取数，空也。

五乘方垛演段：置基数，六自乘之，得数与一个相消，得式。置二级数[七个]，取二分之一得[三个二分个之一]。三级数[二十一个]，取六分之一得[三个二分个之一]。四级取数空、一级数[一个]、三位相并，共得八个，寄位。置五级数[三十五个]，取三十分之一，得[一个六分个之一]，六级取数空、以减寄位，余[六个六分个之五]通分内子，得四十一、再寄。置五乘方垛原法七，以分母六相乘，得四十二，内减再寄，余一为实，置七级数[七个]，以分母六相乘，得四十二为法、实如法而一，得四十二分之一、为加、是逐乘七级之取数也。余皆效之[1]。

这些演段术所描述的乘方垛系列公式如下：

$$\text{圭垛积 } S_1 = \sum_{r=1}^{n} r = [(n+1)n] \div 2 = \frac{1}{2}(n^2+n)$$

$$\text{平方垛积 } S_2 = \sum_{r=1}^{n} r^2 = [(2n+3)n+1]n \div 6 = \frac{1}{6}(2n^3+3n^2+n)$$

$$\text{立方垛积 } S_3 = \sum_{r=1}^{n} r^3 = [(n+2)n+1]n^2 \div 4 = \frac{1}{4}(n^4+2n^3+n^2)$$

$$\text{三乘方垛积 } S_4 = \sum_{r=1}^{n} r^4 = \{[(6n+15)n+10]n^2-1\}n \div 30$$
$$= \frac{1}{30}(6n^5+15n^4+10n^3-n)$$

---

〔1〕 関孝和. 括要算法[A]. 元卷. 平山諦. 下平和夫，広瀬秀雄編. 関孝和全集[Z]. 大阪：大阪教育図書，1974：284.

$$四乘方垛积\ S_5 = \sum_{r=1}^{n} r^5 = \{[(2n+6)n+5]n^2-1\}n^2 \div 12$$
$$= \frac{1}{12}(2n^6+6n^5+5n^4-n^2)$$

$$五乘方垛积\ S_6 = \sum_{r=1}^{n} r^6 = [\{[(6n+21)n+21]n^2-7\}n^2+1]n \div 42$$
$$= \frac{1}{42}(6n^7+21n^6+21n^5-7n^3+n)$$

$$六乘方垛积\ S_7 = \sum_{r=1}^{n} r^7 = \{[((3n+12)n+14)n^2-7]n^2+2\}n^2 \div 24$$
$$= \frac{1}{24}(3n^8+12n^7+14n^6-7n^4+2n^2)$$

$$七乘方垛积\ S_8 = \sum_{r=1}^{n} r^8 = [\{[\{(10n+45)n+60\}n^2-42]n^2+20\}n^2-3]n \div 90$$
$$= \frac{1}{90}(10n^9+45n^8+60n^7-42n^5+20n^3-3n)$$

$$八乘方垛积\ S_9 = \sum_{r=1}^{n} r^9 = [\{[\{(2n+10)n+15\}n^2-14]n^2+10\}n^2-3]n^2 \div 20$$
$$= \frac{1}{20}(2n^{10}+10n^9+15n^8-14n^6+10n^4-3n^2)$$

$$九乘方垛积\ S_{10} = \sum_{r=1}^{n} r^{10} = \{[\{[\{(6n+33)n+55\}n^2-66]n^2+66\}n^2- 33]n^2+5\}n \div 66 = \frac{1}{66}(6n^{11}+33n^{10}+55n^9-66n^7+ 66n^5-33n^3+5n)$$

$$十乘方垛积\ S_{11} = \sum_{r=1}^{n} r^{11} = \{[\{[\{(2n+12)n+22\}n^2-33]n^2+44\}n^2- 33]n^2+10\}n^2 \div 24 = \frac{1}{24}(2n^{12}+12n^{11}+22n^{10}- 33n^8+44n^6-33n^4+10n^2)$$

关孝和不仅给出了以上公式，而且综合地观察这系列公式，注意到这些公式的系数符合一定的数列规则，即如图 5－2 及表 5.1 所示。

表 5.1

约法	各垛	n^{12}	n^{11}	n^{10}	n^{9}	n^{8}	n^{7}	n^{6}	n^{5}	n^{4}	n^{3}	n^{2}	n	n^{0}
2	圭　垛											1	1	0
6	平方垛										2	3	1	0
4	立方垛									1	2	1	0	0
30	三乘垛								6	15	10	0	−1	0
12	四乘垛							2	6	5	0	−1	0	0
42	五乘垛						6	21	21	0	−7	0	1	0
24	六乘垛					3	12	14	0	−7	0	2	0	0
90	七乘垛				10	45	60	0	−42	0	20	0	−3	0
20	八乘垛			2	10	15	0	−14	0	10	0	−3	0	0
66	九乘垛		6	33	55	0	−66	0	66	0	−33	0	5	0
24	十乘垛	2	12	22	0	−33	0	44	0	−33	0	10	0	0

他给出生成此数表的一个法则，过程如下。

首先给出一个“式图”表，即二项式展开的系数表 5.2：

表 5.2

	1 级	2 级	3 级	4 级	5 级	6 级	7 级	8 级	9 级	10 级	11 级	12 级	13 级	原法
基　数	1	1												1
圭　垛	1	2	0											2
平方垛	1	3	3	0										3
立方垛	1	4	6	4	0									4
三乘垛	1	5	10	10	5	0								5
四乘垛	1	6	15	20	15	6	0							6
五乘垛	1	7	21	35	35	21	7	0						7
六乘垛	1	8	28	56	70	56	28	8	0					8
七乘垛	1	9	36	84	126	126	84	36	9	0				9
八乘垛	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	0			10
九乘垛	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	0		11
十乘垛	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	0	12

然后根据此数表中的数，按照以下计算规则和程序计算出各级取数：

(圭垛原法－圭垛一级)÷圭垛二级＝二级取数

[平方垛原法－(同一级＋同二级×二级取数)]÷同三级＝三级取数

[立方垛原法－(同一级＋同二级×二级取数＋同三级×三级取数)]÷同四

级＝四级取数

［三乘方垛原法－（同一级＋同二级×二级取数＋同三级×三级取数＋同四级×四级取数）］÷同五级＝五级取数

［四乘方垛原法－（同一级＋同二级×二级取数＋同三级×三级取数＋同四级×四级取数＋同五级×五级取数）］÷同六级＝六级取数

［五乘方垛原法－（同一级＋同二级×二级取数＋同三级×三级取数＋同四级×四级取数＋同五级×五级取数＋同六级×六级取数）］÷同七级＝七级取数

［六乘方垛原法－（同一级＋同二级×二级取数＋同三级×三级取数＋同四级×四级取数＋同五级×五级取数＋同六级×六级取数＋同七级×七级取数）］÷同八级＝八级取数

……

如果各级取数用 B_i 表示，则

二级取数 $B_1=(2-1)\div 2=\frac{1}{2}$

三级取数 $B_2=\left[3-\left(1+3\times\frac{1}{2}\right)\right]\div 3=\frac{1}{6}$

四级取数 $B_3=\left[4-\left(1+4\times\frac{1}{2}+6\times\frac{1}{6}\right)\right]\div 4=0$

五级取数 $B_4=\left[5-\left(1+5\times\frac{1}{2}+10\times\frac{1}{6}+10\times 0\right)\right]\div 5=-\frac{1}{30}$

六级取数 $B_5=\left[6-\left(1+6\times\frac{1}{2}+15\times\frac{1}{6}+20\times 0-15\times\frac{1}{30}\right)\right]\div 6=0$

七级取数 $B_6=\left[7-\left(1+7\times\frac{1}{2}+21\times\frac{1}{6}+35\times 0-35\times\frac{1}{30}+21\times 0\right)\right]\div 7$
$=\frac{1}{42}$

八级取数 $B_7=\left[8-\left(1+8\times\frac{1}{2}+28\times\frac{1}{6}+56\times 0-70\times\frac{1}{30}+\right.\right.$
$\left.\left.56\times 0+28\times\frac{1}{42}\right)\right]\div 8=0$

九级取数 $B_8 = \left[9 - \left(1 + 9 \times \frac{1}{2} + 36 \times \frac{1}{6} + 84 \times 0 - 126 \times \frac{1}{30} + 126 \times 0 + 84 \times \frac{1}{42} + 36 \times 0\right)\right] \div 9 = -\frac{1}{30}$

十级取数 $B_9 = \left[10 - \left(1 + 10 \times \frac{1}{2} + 45 \times \frac{1}{6} + 120 \times 0 - 210 \times \frac{1}{30} + 252 \times 0 + 210 \times \frac{1}{42} + 120 \times 0 - 45 \times \frac{1}{30}\right)\right] \div 10 = 0$

十一级取数 $B_{10} = \left[11 - \left(1 + 11 \times \frac{1}{2} + 55 \times \frac{1}{6} + 165 \times 0 - 330 \times \frac{1}{30} + 462 \times 0 + 462 \times \frac{1}{42} + 330 \times 0 - 165 \times \frac{1}{30} + 55 \times 0\right)\right] \div 11 = \frac{5}{66}$

… … …

一般地，

$$2^n - 1 = (1+1)^n - 1 = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^k + \cdots + C_n^{n-1}$$

则 k 级取数为

$$B_{k-1} = [C_k^{k-1} - (B_0 C_k^0 + B_1 C_k^1 + B_2 C_k^2 + \cdots + B_{k-2} C_k^{k-2})] \div k \text{（其中 } B_0 = 1\text{）} \quad (5.8)$$

其中：$B_2 = \frac{1}{6}$，$B_4 = -\frac{1}{30}$，$B_6 = \frac{1}{42}$，$B_8 = -\frac{1}{30}$，$B_{10} = \frac{5}{66}$，…，是数学史上著名的伯努利(Jacques Bernoulli，1654～1705)数列。

获得各级取数 B_i 后，用它们乘"式图"(表 5.2)中对应的各级(各列)，则得到表 5.3：

表 5.3

	1级	2级	3级	4级	5级	6级	7级	8级	9级	10级	11级	12级	原法
圭　垛	1	1	0										2
平方垛	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0									3
立方垛	1	2	1	0	0								4

（续　表）

	1 级	2 级	3 级	4 级	5 级	6 级	7 级	8 级	9 级	10 级	11 级	12 级	原法
三乘垛	1	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{3}$	0	$-\frac{1}{6}$	0							5
四乘垛	1	3	$\frac{5}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	0						6
五乘垛	1	$\frac{7}{2}$	$\frac{7}{2}$	0	$-\frac{7}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	0					7
六乘垛	1	4	$\frac{14}{3}$	0	$-\frac{7}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	0	0				8
七乘垛	1	$\frac{9}{2}$	6	0	$-\frac{21}{5}$	0	2	0	$-\frac{3}{10}$	0			9
八乘垛	1	5	$\frac{15}{2}$	0	-7	0	5	0	$-\frac{3}{2}$	0	0		10
九乘垛	1	$\frac{11}{2}$	$\frac{55}{6}$	0	-11	0	11	0	$-\frac{11}{2}$	0	$\frac{5}{6}$	0	11
十乘垛	1	6	11	0	$-\frac{33}{2}$	0	22	0	$-\frac{33}{2}$	0	5	0	12
各级取数		2 级取数	3 级取数	4 级取数	5 级取数	6 级取数	7 级取数	8 级取数	9 级取数	10 级取数	11 级取数	12 级取数	
B_i		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{5}{66}$	0	

对此表各行数分别进行通分，就得到表 5.4。

表 5.4

圭　垛	1	1	0											2
平方垛	2	3	1	0										6
立方垛	1	2	1	0	0									4
三乘垛	6	15	10	0	-1	0								30
四乘垛	2	6	5	0	-1	0	0							12
五乘垛	6	21	21	0	-7	0	1	0						42
六乘垛	3	12	14	0	-7	0	2	0	0					24
七乘垛	10	45	60	0	-42	0	20	0	-3	0				90
八乘垛	2	10	15	0	-14	0	10	0	-3	0	0			20
九乘垛	6	33	55	0	-66	0	66	0	-33	0	5	0		66
十乘垛	2	12	22	0	-33	0	44	0	-33	0	10	0	0	24

与表 5.5 一致。

表 5.5

	n^{12}	n^{11}	n^{10}	n^{9}	n^{8}	n^{7}	n^{6}	n^{5}	n^{4}	n^{3}	n^{2}	n	n^{0}	
圭　垛											1	1	0	2
平方垛										2	3	1	0	6
立方垛									1	2	1	0	0	4
三乘垛								6	15	10	0	−1	0	30
四乘垛							2	6	5	0	−1	0	0	12
五乘垛						6	21	21	0	−7	0	1	0	42
六乘垛					3	12	14	0	−7	0	2	0	0	24
七乘垛				10	45	60	0	−42	0	20	0	−3	0	90
八乘垛			2	10	15	0	−14	0	10	0	−3	0	0	20
九乘垛		6	33	55	0	−66	0	66	0	−33	0	5	0	66
十乘垛	2	12	22	0	−33	0	44	0	−33	0	10	0	0	24

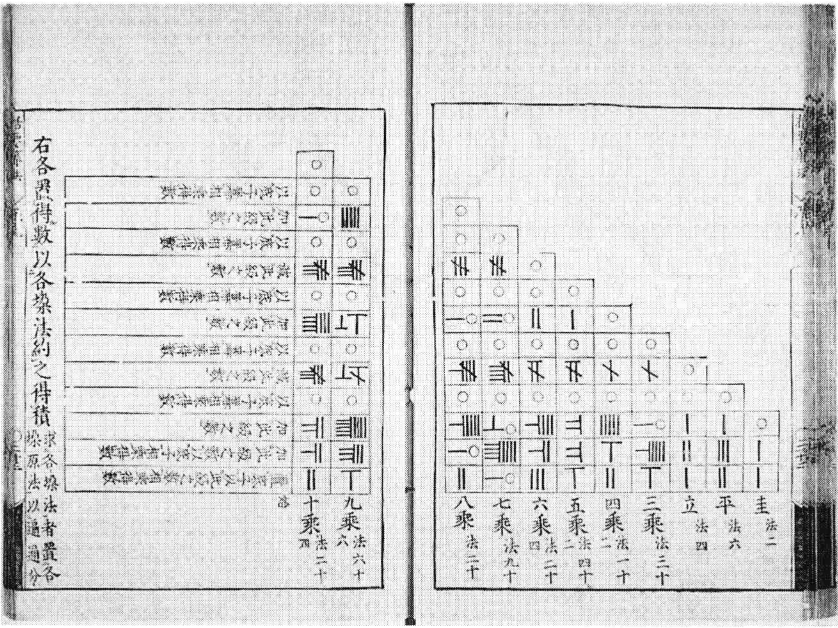


图 5.2 《括要算法》“垛积术解”中的推演图

以上所述关孝和的方法，相当于给出幂和公式

$$S_p(n-1)=\sum_{r=1}^{n-1} r^p=\frac{1}{p+1}\sum_{k=0}^{p}\binom{p+1}{k}B_k\, n^{p+1-k} \tag{5.9}$$

其系数 B_k 乃伯努利数列，是 Jacques Bernoulli 发现的，其遗稿于 1713

年发表于 *Ars Conjectandi*，比关孝和的《括要算法》(1712)出版时间要晚[1]。伯努利导出的幂和公式为

$$\sum_{r=1}^{n} r^{p} = \frac{1}{p+1}n^{p+1} + \frac{1}{2}n^{p} + \frac{p}{2!}B_{1}n^{p-1} - \frac{p(p-1)(p-2)}{4!}B_{2}n^{p-3} + \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)}{6!}B_{3}n^{p-5} - \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)(p-5)(p-6)}{8!}B_{4}n^{p-7} + \cdots$$

他进一步地说明，式中的 $B_1, B_2, B_3, \cdots$，分别是 $\sum_{r=1}^{n} r^2$，$\sum_{r=1}^{n} r^4$，$\sum_{r=1}^{n} r^6$，…等和式中最后一项的系数(即 n 的系数)，也就是 $B_1 = \frac{1}{6}$，$B_2 = -\frac{1}{30}$，$B_3 = \frac{1}{42}$，$B_4 = -\frac{1}{30}$，…。伯努利数列在三角函数、对数函数的无穷级数展开式中有广泛的应用。

以下说明关孝和方法的正确性[2]。

设

$$S_{p-i} = \sum_{r=1}^{n} r^{p-i} = \frac{1}{p-i+1}(\mathrm{A}_i^0 n^p + \mathrm{A}_i^1 n^{p-1} + \mathrm{A}_i^2 n^{p-2} + \cdots + \mathrm{A}_i^k n^{p-k} + \cdots + \mathrm{A}_i^{p-2} n^2 + \mathrm{A}_i^{p-1} n) \tag{5.10}$$

由 $(r+1)^p = \mathrm{C}_p^0 r^p + \mathrm{C}_p^1 r^{p-1} + \mathrm{C}_p^2 r^{p-2} + \cdots + \mathrm{C}_p^k r^{p-k} + \cdots + \mathrm{C}_p^{p-1} r^1 + \mathrm{C}_p^p r^0$

把 $r = 1, 2, 3, \cdots, n$ 分别代入，显然有

$$2^p = \mathrm{C}_p^0 1^p + \mathrm{C}_p^1 1^{p-1} + \mathrm{C}_p^2 1^{p-2} + \cdots + \mathrm{C}_p^k 1^{p-k} + \cdots + \mathrm{C}_p^{p-1} 1^1 + \mathrm{C}_p^p 1^0$$

$$3^p = \mathrm{C}_p^0 2^p + \mathrm{C}_p^1 2^{p-1} + \mathrm{C}_p^2 2^{p-2} + \cdots + \mathrm{C}_p^k 2^{p-k} + \cdots + \mathrm{C}_p^{p-1} 2^1 + \mathrm{C}_p^p 2^0$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$(n+1)^p = \mathrm{C}_p^0 n^p + \mathrm{C}_p^1 n^{p-1} + \mathrm{C}_p^2 n^{p-2} + \cdots + \mathrm{C}_p^k n^{p-k} + \cdots + \mathrm{C}_p^{p-1} n^1 + \mathrm{C}_p^p n^0$$

对此系列等式进行叠加，得

$$\sum_{r=1}^{n} (r+1)^p = \mathrm{C}_p^0 \sum_{r=1}^{n} r^p + \mathrm{C}_p^1 \sum_{r=1}^{n} r^{p-1} + \cdots +$$

---

〔1〕 藤原松三郎.和算史の研究(其十二)[A].帝国学士院記事，1943，3(2)：374.另见：藤原松三郎先生数学史論文刊行会編.東洋数学史への招待[C].仙台：東北大学出版会，2007：124.

〔2〕 加藤平左衛門.和算の研究・雑論[M].日本学術振興会刊.東京：丸善株式会社，1954：252.

$$C_p^k\sum_{r=1}^{n} r^{p-k}+\cdots+C_p^{p-1}\sum_{r=1}^{n} r^1+C_p^p\sum_{r=1}^{n} r^0$$

即 $$\sum_{r=1}^{n}(r+1)^p-\sum_{r=1}^{n} r^p=C_p^1\sum_{r=1}^{n} r^{p-1}+C_p^2\sum_{r=1}^{n} r^{p-2}+\cdots+ C_p^k\sum_{r=1}^{n} r^{p-k}+\cdots+C_p^{p-1}\sum_{r=1}^{n} r^1+C_p^p\sum_{r=1}^{n} r^0$$

亦即 $$(n+1)^p-1=C_p^1\sum_{r=1}^{n} r^{p-1}+C_p^2\sum r^{p-2}+\cdots+ C_p^k\sum_{r=1}^{n} r^{p-k}+\cdots+C_p^{p-1}\sum_{r=1}^{n} r+C_p^p\sum_{r=1}^{n} r^0$$

根据二项式定理，有

$$\begin{aligned}(n+1)^p-1&=C_p^0 n^p+C_p^1 n^{p-1}+C_p^2 n^{p-2}+\cdots+C_p^k n^{p-k}+\cdots+C_p^{p-1} n\\&=n^p+C_p^1 n^{p-1}+C_p^2 n^{p-2}+\cdots+C_p^k n^{p-k}+\cdots+C_p^{p-1} n\end{aligned}$$

所以得到 $$n^p+C_p^1 n^{p-1}+C_p^2 n^{p-2}+\cdots+C_p^k n^{p-k}+\cdots+C_p^{p-1} n$$

$$=C_p^1\sum_{r=1}^{n} r^{p-1}+C_p^2\sum_{r=1}^{n} r^{p-2}+\cdots+C_p^k\sum_{r=1}^{n} r^{p-k}+\cdots+ C_p^{p-1}\sum_{r=1}^{n} r+nC_p^p$$

由此式整理出 $C_p^1\sum_{r=1}^{n} r^{p-1}$，并把式(5.10)代入各 $C_p^i\sum_{r=1}^{n} r^{p-i}$，则得

$$\begin{aligned}C_p^1\sum_{r=1}^{n} r^{p-1}&=(n^p+C_p^1 n^{p-1}+C_p^2 n^{p-2}+\cdots+C_p^k n^{p-k}+\cdots+C_p^{p-1} n)-\\&\quad C_p^2\sum_{r=1}^{n} r^{p-2}-\cdots-C_p^k\sum_{r=1}^{n} r^{p-k}-\cdots-C_p^{p-1}\sum_{r=1}^{n} r-nC_p^p\\&=(n^p+C_p^1 n^{p-1}+C_p^2 n^{p-2}+\cdots+C_p^k n^{p-k}+\cdots+C_p^{p-1} n)-\\&\quad \frac{C_p^2}{p-1}(A_2^0 n^{p-1}+A_2^1 n^{p-2}+\cdots+A_2^k n^{p-k-1}+\cdots+\\&\quad A_2^{p-3} n^2+A_2^{p-2} n)-\frac{C_p^3}{p-2}(A_3^0 n^{p-2}+A_3^1 n^{p-3}+\cdots+\\&\quad A_3^k n^{p-k-2}+\cdots+A_3^{p-4} n^2+A_3^{p-3} n)-\\&\quad \cdots\quad\cdots\quad\cdots\\&\quad \frac{C_p^i}{p-i+1}(A_i^0 n^{p-i+1}+A_i^1 n^{p-i}+\cdots+A_i^k n^{p-i-k+1}+\cdots+A_i^{p-i-1} n^2+A_i^{p-i} n)-\\&\quad \cdots\quad\cdots\quad\cdots\end{aligned}$$

$$-\frac{C_p^{p-1}}{2}(A_{p-1}^0 n^2 + A_{p-1}^1 n) - \frac{C_p^p}{1}(A_p^0 n)$$

整理得

$$\begin{aligned}
C_p^1 \sum_{r=1}^{n} r^{p-1} = n^p + \left(C_p^1 - \frac{C_p^2}{p-1}A_2^0\right)n^{p-1} + \\
\left(C_p^2 - \frac{C_p^2}{p-1}A_2^1 - \frac{C_p^3}{p-2}A_3^0\right)n^{p-2} + \\
\left(C_p^3 - \frac{C_p^2}{p-1}A_2^2 - \frac{C_p^3}{p-2}A_3^1 - \frac{C_p^4}{p-3}A_4^0\right)n^{p-3} + \\
\left(C_p^4 - \frac{C_p^2}{p-1}A_2^3 - \frac{C_p^3}{p-2}A_3^2 - \frac{C_p^4}{p-3}A_4^1 - \frac{C_p^5}{p-4}A_5^0\right)n^{p-4} + \\
\cdots\quad\cdots\quad\cdots \\
\left(C_p^i - \frac{C_p^2}{p-1}A_2^{i-1} - \frac{C_p^3}{p-2}A_3^{i-2} - \cdots - \frac{C_p^i}{p-i+1}A_i^1 - \frac{C_p^{i+1}}{p-i}A_{i+1}^0\right)n^{p-i} + \\
\cdots\quad\cdots\quad\cdots \\
\left(C_p^{p-1} - \frac{C_p^2}{p-1}A_2^{p-2} - \frac{C_p^3}{p-2}A_3^{p-3} - \cdots - \frac{C_p^{p-1}}{2}A_{p-1}^1 - \frac{C_p^p}{1}A_p^0\right)n
\end{aligned} \tag{5.11}$$

又因为左式套用式(5.10)，得

$$\begin{aligned}
C_p^1 \sum_{r=1}^{n} r^{p-1} = \Big(A_1^0 n^p + A_1^1 n^{p-1} + A_1^2 n^{p-2} + \cdots + \\
A_1^k n^{p-k} + \cdots + A_1^{p-2} n^2 + A_1^{p-1} n\Big)
\end{aligned} \tag{5.12}$$

比较式(5.11)与式(5.12)，于是，推知 $A_1^0 = 1$，并且类推可知

$$\begin{cases} A_k^0 = 1 & (k = 1,\ 2,\ \cdots,\ p) \\ A_k^i = B_i C_{p-k+1}^i & (i = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ p) \end{cases}$$

$$A_1^1 = C_p^1 - \frac{C_p^2}{p-1}A_2^0 = C_p^1 - \frac{C_p^2}{p-1} = \frac{p}{2} = B_1 C_p^1$$

$$A_1^2 = C_p^2 - \frac{C_p^2}{p-1}A_2^1 - \frac{C_p^3}{p-2}A_3^0 = C_p^2 - \frac{C_p^2}{p-1}A_2^1 - \frac{C_p^3}{p-2}$$

$$= C_p^2 - \frac{C_p^2}{p-1} B_1 C_{p-1}^1 - \frac{C_p^3}{p-2} = \frac{1}{6} C_p^2 = B_2 C_p^2$$

$$A_1^3 = C_p^3 - \frac{C_p^2}{p-1} A_2^2 - \frac{C_p^3}{p-2} A_3^1 - \frac{C_p^4}{p-3} A_4^0$$

$$= C_p^3 - \frac{C_p^2}{p-1} A_2^2 - \frac{C_p^3}{p-2} A_3^1 - \frac{C_p^4}{p-3}$$

$$= C_p^3 - \frac{C_p^2}{p-1} B_2 C_{p-1}^2 - \frac{C_p^3}{p-2} B_1 C_{p-2}^1 - \frac{C_p^4}{p-3} = 0 \cdot C_p^3 = B_3 C_p^3$$

$$A_1^4 = C_p^4 - \frac{C_p^2}{p-1} A_2^3 - \frac{C_p^3}{p-2} A_3^2 - \frac{C_p^4}{p-3} A_4^1 - \frac{C_p^5}{p-4} A_5^0$$

$$= C_p^4 - \frac{C_p^2}{p-1} B_3 C_{p-1}^3 - \frac{C_p^3}{p-2} B_2 C_{p-2}^2 - \frac{C_p^4}{p-3} B_1 C_{p-3}^1 - \frac{C_p^5}{p-4}$$

$$= -\frac{1}{30} C_p^4 = B_4 C_p^4$$

…… ……

$$A_1^i = C_p^i - \frac{C_p^2}{p-1} A_2^{i-1} - \frac{C_p^3}{p-2} A_3^{i-2} - \cdots - \frac{C_p^i}{p-i+1} A_i^1 - \frac{C_p^{i+1}}{p-i} A_{i+1}^0$$

$$= C_p^i - \frac{C_p^2}{p-1} B_{i-1} C_{p-1}^{i-1} - \frac{C_p^3}{p-2} B_{i-2} C_{p-2}^{i-2} - \cdots -$$

$$\frac{C_p^i}{p-i+1} B_1 C_{p-i+1}^1 - \frac{C_p^{i+1}}{p-i} = B_{i-1} C_p^i$$

即 $B_1 = \frac{1}{2}$，$B_2 = \frac{1}{6}$，$B_3 = 0$，$B_4 = -\frac{1}{30}$，$B_5 = 0$，$B_6 = \frac{1}{42}$，$B_7 = 0$，$B_8 = -\frac{1}{30}$，…其中的 p，关孝和称之为原法；B_k 关孝和称之为诸级取数。

关孝和并没有给出这些公式的推导过程，估计是用招差法获得的。因为在这一卷中，他把垛积与招差放在一起进行解说，而且首先介绍招差术，这方面的论述请参阅冯立升教授与竹之内修教授的论文[1][2][3]。事实

〔1〕 冯立昇. 关孝和的自然数幂和公式造术原理新探[A]. 数学史研究[C]. 第七卷. 呼和浩特：内蒙古大学出版社，2001：110.

〔2〕 竹之内修. 自然数の累乗和——関孝和業績についての考察[J]. 国際研究論叢(大阪国際大学紀要)，1993(6)：25－41.

〔3〕 竹之内修. 関孝和の積術について [J]. 和算研究所紀要，1998(1)：5－22.

上，在《大统历法》"法原"部分，给出"日月五星平定三差、太阳盈缩平立定三差之原"之后，有这样一段文字：

按《授时历》于七政盈缩，并以垛积招差立算，其法巧合天行，与西人用小轮推步之法，殊途同归。然世所传《九章》诸书，不载其术，《历草》载其术，而不言其故。宣城梅文鼎为之图解，于平差、立差之理，垛积之法，皆有以发明其所以然。有专书行于世，不能备录，谨录《招差图说》，以明立法之大意云〔1〕。

这里也是把垛积与招差连用，表明明清时期的中国历算家与和算家一样，都认为垛积与招差有内在的联系而互相为用。

5.3 其他和算家的垛积术

《括要算法》之后，垛积问题成为和算家热衷于研究的重要课题之一，一直到幕末，这类问题广见于和算书中，和家一方面构造不同的幂和公式，一方面构造方垛与衰垛以外的不同类型的高阶等差数列，久留岛义太、松永良弼、有马赖徸(Arima Yoriyuki，1714～1783)、会田安明(Aida Yasuaki，1747～1817)、和田宁(Wata Yasushi，1787～1840)、御粥安本(Gokayu Yasumoto，1794～1862)、平野喜房(Hirano Kibo，生卒年不详)等人的工作比较具有代表性，现分别介绍之。

5.3.1 久留岛义太的方垛术

久留岛义太的稿本著作《开方和术》(著作时间不详)中含有"方垛术"内容，他给出了与关孝和推演方法不同的乘方垛垛积公式：

$$S_p = \sum_{r=1}^{n} r^p = \frac{1}{p+1}\sum_{k=0}^{p} A_k n^{p-k+1} \tag{5.13}$$

其中：$p+1$ 称作原法；A_0，A_1，A_2，A_3，…依次称作初级数、二级数、三级数、四级数、…，确定它们的方法如下〔2〕：

---

〔1〕 张廷玉等. 明史・志第九[M]. 北京：中华书局，1974：591.
〔2〕 久留岛義太. 開方和術[M]. 学士院藏稿本. 0926 号.

原法：平方垛者三，立方垛者四，三乘方垛者五，四乘方垛者六，乘数递添二为原法；

初级数：每乘以一为初级数[求得每级数而用齐分之后，以同分母定为初级数也]；

二级数：置原法，二除，为二级数，常正。

三级数正：原法三除，以减二级数，余以原一差[原法内减一，余也。后仿之]相乘，二除，为三级数。

四级数空：原法四除，以减二级数，余以原一差相乘，三除，以减三级数，余以原二差[原法内减二，余也。后原三差、原四差之数仿之]相乘，二除，为四级数[乃至与前级数相减而适尽者，其级为空，后仿之]。

五级数负：原法五除，以减二级数，余以原一差相乘，四除，以减三级数，余以原二差相乘，三除，以减四级数[正无人，故五级为负，后仿之]，余以原三差相乘，二除，为五级数。

六级数空：原法六除，以减二级数，余以原一差相乘，五除，以减三级数，余以原二差相乘，四除，以减四级数[为负]，余以原三差相乘，三除，以减五级数[为空]。

七级数正：原法七除，以减二级数，余以原一差相乘，六除，以减三级数，余以原二差相乘，五除，以减四级数，余[为负]以原三差相乘，四除，以减五级数，余以原四差相乘，三除，以减六级数，余[负无人，故七级数为正]以原五差相乘，二除，为七级数。

八级数以上，推前术求之，今不赘。

即按照以下方式计算出原法和各级数：

原法　$m = p + 1$，

初级数 $A_0 = 1$，

二级数 $A_1 = \frac{m}{2}$，

三级数 $A_2 = \frac{m-1}{2}\left(A_1 - \frac{m}{3}\right)$，

四级数 $A_3 = \frac{m-2}{2}\left[A_2 - \frac{m-1}{3}\left(A_1 - \frac{m}{4}\right)\right] = 0$，

五级数 $A_4=\frac{m-3}{2}\left\{A_3-\frac{m-2}{3}\left[A_2-\frac{m-1}{4}\left(A_1-\frac{m}{5}\right)\right]\right\}$，

六级数 $A_5=\frac{m-4}{2}\left\{A_4-\frac{m-3}{3}\left[A_3-\frac{m-2}{4}\left(A_2-\frac{m-1}{5}\left(A_1-\frac{m}{6}\right)\right)\right]\right\}=0$，

其一般规律如下：

$$A_{2k+1}=0$$

$$\begin{aligned}A_{2k}=&\frac{(p-2k)+2}{2}A_{2k-1}-\frac{[(p-2k)+2][(p-2k)+3]}{2\cdot 3}A_{2k-2}+\\&\frac{[(p-2k)+2][(p-2k)+3][(p-2k)+4]}{2\cdot 3\cdot 4}A_{2k-3}-\cdots+\\&(-1)^{k+1}\frac{[(p-2k)+2][(p-2k)+3][(p-2k)+4]\cdots p}{2\cdot 3\cdot 4\cdot\cdots\cdot 2k}A_1+\\&(-1)^{k}\frac{[(p-2k)+2][(p-2k)+3][(p-2k)+4]\cdots p(p+1)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot\cdots\cdot(2k+1)}A_0\end{aligned}$$

在久留岛义太的垛积公式中没有采用伯努利数，公式之后，久留岛义太又给出了由奇乘垛公式生成偶乘垛公式的方法，其术文如下：

> 盖以奇乘为正生，以偶乘垛为副生也。
>
> 副生术曰：从平方垛生立方垛，从三乘方垛生四乘方垛，递如此。其例云：级数者，常增最上空位，而下上第二级者，用其垛原法半，不用前垛数；其他级数者，就前垛，最上级数一除、次三级二除、又次三级三除、次之三级四除、又下三级五除、次六除、次七除、以至于最下级，则为副生之方垛每级数也。但积法者，从各乘原法耳，求得每级数之后，依齐分之术整每级数，就以同分母乘原法，为积法也[1]。

对于偶数 p（即奇乘垛），设奇乘垛公式为

$$S_p=\frac{1}{p+1}[A_0^{(p)}n^{p+1}+A_1^{(p)}n^p+A_2^{(p)}n^{p-1}+\cdots+A_{p-1}^{(p)}n^2+A_p^{(p)}n]$$

由此生成 $p+1$ 乘（即偶乘垛）的垛积公式

$$S_{p+1}=\frac{1}{p+2}[A_0^{(p+1)}n^{p+2}+A_1^{(p+1)}n^{p+1}+A_2^{(p+1)}n^p+\cdots+A_p^{(p+1)}n^2+A_{p+1}^{(p+1)}n]$$

---

〔1〕 久留岛義太. 開方和術[M]. 学士院藏稿本.

在 S_p 的和式中，按照降幂排列，$A_0^{(p)}$ 为最下级，$A_p^{(p)}$ 为最上级。由 S_p 的系数 $A_i^{(p)}$ 生成 S_{p+1} 的系数 $A_i^{(p+1)}$。其演算如下：

首先计算 $A_{p+1}^{(p+1)}=0$，$A_1^{(p+1)}=\frac{1}{2}(p+2)$，

然后计算数列：

$$\frac{A_p^{(p)}}{1},\ \frac{A_{p-2}^{(p)}}{2},\ \frac{A_{p-4}^{(p)}}{3},\ \frac{A_{p-6}^{(p)}}{4},\ \cdots,\ \frac{A_4^{(p)}}{\frac{p}{2}-1},\ \frac{A_2^{(p)}}{\frac{p}{2}},\ \frac{A_0^{(p)}}{\frac{p}{2}+1}$$

对这一系列分数进行通分，其分母为 M_0，各分子分别是 M_0，M_1，M_2，M_3，…。把分母 M_0 与 S_{p+1} 的原法 $p+2$ 相乘的积 $M_0(p+2)$，称做积法。

最后按照以下关系进行计算：

$$A_1^{(p+1)}=\frac{1}{2}M_0(p+2)$$

$$M_0A_0^{(p+1)}=M_0$$

$$\frac{1}{2}M_0(p+2)=M_1$$

$$M_0A_2^{(p+1)}=M_2$$

$$M_0A_3^{(p+1)}=M_3$$

$$\cdots\qquad\cdots$$

$$M_0A_{\frac{p}{2}}^{(p+1)}=M_{\frac{p}{2}}$$

于是得到

$$S_{p+1}=\frac{1}{M_0(p+2)}(M_0n^{p+2}+M_1n^{p+1}+M_2n^p+\cdots+M_{\frac{p}{2}}n^2) \qquad (5.14)$$

5.3.2 松永良弼的垛积术

关流二传弟子松永良弼对垛积问题做了更广泛的研究，研究成果主要记录在稿本《算法全经·垛积》（著作时间不详）和《太阴率》（1738）中。

1.《算法全经·垛积》中的垛积内容

《算法全经·垛积》系统地讨论各类垛的求积问题，是对关孝和关于方

垛与衰垛研究成果的重要发展。内容如下：

1）衰垛

(1) 衰垛标[1]：

即二项式系数表(如表5.6)。

表5.6

	圭	三角	再乘	三乘	四乘	五乘
一号	1	1	1	1	1	1
二号	2	3	4	5	6	7
三号	3	6	10	15	21	28
四号	4	10	20	35	56	84
五号	5	15	35	70	126	210
六号	6	21	56	128	252	462
七号	7	28	84	210	462	924
八号	8	36	120	330	792	1 716
九号	9	45	165	495	1 287	3 003
十号	10	55	220	715	2 001	5 005
十一号	11	66	286	1 001	3 003	8 008
十二号	12	78	364	1 365	4 368	12 376
十三号	13	91	455	1 820	6 188	18 564
十四号	14	105	560	2 380	8 568	27 132
十五号	15	120	680	3 060	11 628	38 760
十六号	16	136	816	3 876	15 504	54 264
十七号	17	153	969	4 845	20 349	74 613
十八号	18	171	1 140	5 985	26 334	100 947
十九号	19	190	1 330	7 315	33 649	134 596
二十号	20	210	1 540	8 855	42 504	177 100

〔1〕标，繁体字写作"標"，以旁略书作"票"，在日语中，读音与"表"相同，所以应该是"表"的异体字，在松永良弼的著作中，有时写作"標"，有时写"票"。

第一号基数也，第二号名曰原；原加一个，乘原数，得数二除，为第三号；原加二个，乘三号，得数三除，为第四号；原加三个，乘四号，得数四除，为第五号；原加四个，乘五号，得数五除，为第六号；递如此，而得各乘衰垛积[1]。

表 5.6 为 C_{n+i-1}^{i} 数表，n 为诸号，i 表示圭、三角、再乘等。下文中的各类衰垛便是此数表中的某列数。

（2）衰垛式

以数表形式（即所谓的“衰垛标”）给出各种衰垛的垛积公式，衰垛标即

$$C_{n+i}^{i+1} = \frac{1}{(i+1)!}\prod_{k=0}^{i}(n+k) = \frac{1}{(i+1)!}\sum_{j=0}^{i}A_i^j\, n^{i+1-j} \qquad (5.15)$$

中 A_i^j 数表（i 为原法）。其表如表 5.7。

表 5.7

									原法
					0	1	1	圭	1
				0	2	3	1	三角	2
			0	6	11	6	1	再乘	3
		0	24	50	35	10	1	三乘	4
	0	120	274	225	85	15	1	四乘	5
0	720	1 764	1 624	735	175	21	1	五乘	6
		递如此，而求每级数	前垛下级乘原法，加上级	前垛下级乘原法，加上级	前垛下级乘原法，加上级	前垛下级乘原法，加上级	恒一		

表 5.7 下行的注文中第一级“恒一”，以下诸级都是“前垛下级乘原法，加上级”为该级之数，意思是说，式(5.15)中系数 A_i^j 的生成方式如下：

$$A_i^0 = 1,\ A_i^j = 0\ (j > i),\ A_k^j = jA_{k-1}^{j-1} + A_{k-1}^j\ (k=1,\ 2,\ 3,\cdots)$$

这里 $A_0^j + A_1^j + A_2^j + \cdots + A_j^j = (i+1)!$

2）方垛

（1）方垛式

“方垛式”以系数表形式给出乘方垛系列的垛积公式：

$$S_p(n) = \sum_{r=1}^{n} r^p = \frac{1}{p+1}\sum_{k=1}^{p} A_{p+2-k}\, n^{p+2-k} \qquad (5.16)$$

---

〔1〕松永良弼. 算法全經·垛積[A]. 平山諦，内藤淳編. 松永良弼[C]. 松永良弼刊行会. 東京：東京法令出版株式会社，1987：290.

与《括要算法》中的公式相同，即表5.8表示 A_k 系列数值。

表5.8

42	12	30	4	6	2	约法
0						
1	0					
0	0	0				
−7	−1	−1	0			
0	0	0	0	0		
21	4	10	1	1	0	
21	6	14	2	3	1	0
6	2	6	1	2	1	1
五乘	四乘	三乘	立	平	圭	

在表的后面，松永良弼给出"求各级数法"，即求 A_k 的方法：

置所求之垛乘数，加二，为因法，就为初级约法；

置前垛初级数，以因法乘之，以初级约法除之，为其垛初级数；

初级约法内减一，为次级约法；就又减一，为三级约法；三级约法减二，为五三级约法；五级约法减二，为七级约法；七级约法减二，为九级约法；递求之，尽前垛级数而止。

置前垛每级数，以因法乘之，以其级约法除之，得其垛每级数。

凡求偶乘者，径为得其垛式；若所求奇乘者，并奇级数，与第二级数相减之，为最上级数，第二级数多者为正，少者为负。

倍第二级数，为约法。［又术：置前垛约法，以因法乘之，以次级约法除之，得数又以所求垛初级数相乘，以前垛初级数除之，为其垛约法，又同焉］[1]。

设前垛式为 $$S_{p-1}(n)=\sum_{r=1}^{n} r^{p-1}=\frac{1}{A_0}\sum_{k=1}^{p} A_{p+1-k}n^{p+1-k} \tag{5.17}$$

后垛式为 $$S_p(n)=\sum_{r=1}^{n} r^{p}=\frac{1}{M_0}\sum_{k=1}^{p} \mathrm{C}_{p+2-k}n^{p+2-k} \tag{5.18}$$

---

[1] 松永良弼. 算法全經・垛積[A]. 平山諦，内藤淳編. 松永良弼[C]. 松永良弼刊行会. 東京：東京法令出版株式会社，1987：291－292.

则对于前垛(即 $p-1$ 乘垛),$p-1$ 称做乘数,$p+1$ 为因法,A_0 称做约法,A_p 称做初级数,A_{p-1} 称做次级数,A_{p-2} 称做三级数,…依次称谓。以上术文所述方法乃由 A_k 而推演 M_k 的方法,即

$$M_k = A_{k-1}\frac{p+1}{k}\ (k = p+1,\ p,\ p-1,\ p-2,\ \cdots,\ 2,\ 1,\text{为各级约法})$$

$$M_0 = 2A_p$$

当 $p-1$ 为偶数时,式(5.17)的最上级是 n^2 项的系数,按照以上方法,S_p 的系数全部由 S_{p-1} 的系数推演出来。

当 $p-1$ 为奇数时,S_p 的其他系数由 S_{p-1} 的系数推演出来,式(5.17)的最上级是 n 项的系数,不能由它推演出来,而是按照以下公式计算出来的:

$$M_1 = M_p - (M_{p+1} + M_{p-1} + M_{p-3} + \cdots + M_5 + M_3)$$

相当于在

$$S_p(n) = \sum_{r=1}^{n} r^p = \frac{1}{p+1}\sum_{k=0}^{p} C_{p+1}^{k} B_{k-1} n^{p+1-k}\left(\text{这里定义 } B_{-1} = 1,\ B_0 = \frac{1}{2}\right)$$

中,有 $\sum_{k=0}^{p}(-1)^k B_{k-1} C_{p+1}^{k} = 0$,即伯努利数的循环公式〔1〕。

(2) 方垛式求廉之术

根据乘方垛和式的方根(商式)以确定乘方垛垛积公式的方法。首先给出“商式立标”,即表 5.9。

表 5.9

圭垛	1					
平垛	1	1				
立垛	1	4	1			
三乘	1	11	11	1		
四乘	1	26	66	26	1	
五乘	1	57	302	302	57	1
	初、圭、常一	初倍平一、加上二段	初三立一、加上二段	初四三乘一、加上二段	初五四乘一、加上二段	初六五乘一、加上二段

〔1〕 学士院.明治前日本数学史.第二卷[M].東京:野間科学医学研究資料館,1976:508.

对于 $r^p=\sum_{k=1}^{p}A_p^kC_{p+r-k}^p$，系数 A_p^i 唯一存在。“商式立标”就是 A_p^i 的数表。实际上，存在如下关系[1]：

$$S_p(n)=\sum_{r=1}^{n}r^p=\sum_{k=1}^{p}A_p^kC_{p+n+1-k}^{p+1} \tag{5.19}$$

在表后的“求廉之术”一节，介绍了商式立标（表5.9）中数字的生成规律。接着，松永良弼给出了求 $p-1$ 乘方垛的商式的方法，方法如下：

求商式各级数术曰：乘数加二，为原，圭为二，平垛为三，立垛为四，三乘垛为五，四乘垛以上仿此，从一逐随其垛乘数各自乘之，名曰何幂。

最下级常一，或最上级恒一，以求之，又同焉。

一幂乘原，以减二幂，余为二级数；

一幂乘原一差[2]，以二除之，得数以减二幂，余乘原得数，以减三幂，余为三级数；平垛者，置原三，内减一，余名曰原一差，以后谓原二差、原三差之类，皆原数内减其数，余也。

一幂乘原二差，得数以三除之，得数以减二幂，余乘原一差，得数以二除之，得数以减三幂，余乘原，得数以减四幂，余为四级数；以下文不致详。

一幂乘原三差，四除，以减二幂，余乘原二差，三除，以减三幂，余乘原一差，一除，以减四幂，余乘原，以减五幂，余为五级数；

逐如此而得各商式级数[3]。

乘数为 $p-1$，加2，即 $p+1=A_0$，为原，

最上级 $A_1=1$，

第二级 $A_2=2^p-1^pA_0=2^p-1^p(p+1)$，

第三级 $A_3=3^p-\left(2^p-1^p\dfrac{A_0-1}{2}\right)=3^p-2^p(p+1)+1^p\dfrac{(p+1)p}{2}$

$=3^p-2^pC_{p+1}^1+1^pC_{p+1}^2$，

第四级 $A_4=4^p-3^pC_{p+1}^1+2^pC_{p+1}^2-1^pC_{p+1}^3$，

---

〔1〕藤井康生. 江户時代の数学の研究——垛積について[D]. 加東：兵庫教育大学大学院学位論文，2001：23.

〔2〕“原一差”，指原与一的差，“原二差”，指原与二的差，以下“原三差”、“原四差”等类此。

〔3〕松永良弼. 算法全經・垛積[A]. 平山諦，内藤淳編. 松永良弼[C]. 松永良弼刊行会. 東京：東京法令出版株式会社，1987：293-294.

… …

第 n 级 $A_n = n^p - (n-1)^p C_{p+1}^1 + (n-2)^p C_{p+1}^2 - (n-3)^p C_{p+1}^3 + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot 1^p C_{p+1}^{n-1}$

$p-1$ 乘方垛的商式 A_1, A_2, A_3, …, A_p,便是“商式立标”(表 5.9)中相应一行的数字。

接着,讨论 $p-1$ 乘方垛的商式与 p 乘方垛的商式的关系,设

前者各级为 A_1, A_2, A_3, …, A_p;

后者各级为 A_1', A_2', A_3',…, A_p', A_{p+1}',

则有 $A_1' = 1$,

$A_2' = 2A_2 + pA_1$,

$A_3' = 3A_3 + (p-1)A_2$,

$A_4' = 4A_4 + (p-2)A_3$,

… …

$A_p' = pA_p + 2A_{p-1}$。

这样可以由 $p-1$ 乘方垛的商式获得 p 乘方垛的商式。

获得乘方垛的商式之后,则可依商式求方垛式,即求乘方垛的垛积公式。松永良弼以三乘方垛为例,说明求解之法则:

假如欲三乘方垛式者,置三乘衰垛式,

$24n + 50n^2 + 35n^3 + 10n^4 + n^5$,名曰甲($F_1$);

置甲,以负一为商,四乘方开之,余式,

$-6n - 5n^2 + 5n^3 + 5n^4 + n^5$,名曰乙($F_2$);

置乙,又商负一,而四乘方开之,余式,

$4n - 5n^3 + n^5$,名曰丙(F_3);

置丙,再商负一,而四乘方开之,余式,

$-n + 5n^2 + 5n^3 - 5n^4 + n^5$,名曰丁($F_4$);

视商式,三乘垛止于四级,故负商开除之,又到于丁而止焉。

以商式上级一乘甲，以二级一十一乘乙，以三级一十一乘丙，以四级一乘丁，右四位相并，得三乘方垛式：

$$-4n+40n^3+60n^4+24n^5$$

置三乘衰垛法一百二十，与三乘方垛式各级数依遍约术[1]遍以四约之，得式：

$$-n+10n^3+15n^4+6n^5$$

约法三十。

他皆效之[2]。

以上算法实际上是通过三乘衰垛式

$$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5!} = \frac{1}{5!}(24n+50n^2+35n^3+10n^4+n^5) \qquad (5.20)$$ [3]

而求三乘法垛式。

对式(5.20)以 1 为商进行开方，第一次减根变换后的式子称作"余式"(即乙)，也即以$(n-1)$代替式(5.20)中的 n，所得到的式子，即

$$F_1 = 24n+50n^2+35n^3+10n^4+n^5 = n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$$

$$F_2 = -6n-5n^2+5n^3+5n^4+n^5 = (n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)$$

同样，对 F_2，F_3分别以 1 为商进行开方，各第一次减根变换后的式子分别是 F_3，F_4，即

$$F_3 = 4n-5n^3+n^5 = (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$$

$$F_4 = -n+5n^2+5n^3-5n^4+n^5 = (n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)$$

根据"商式立标"(表 5.9)可知，三乘方垛的商式依次为 A_1，A_2，A_3，A_4，所以有

---

〔1〕 具体方法参见本书第 6 章。

〔2〕 松永良弼. 算法全經・垛積[A]. 平山諦，内藤淳編. 松永良弼[C]. 松永良弼刊行会. 東京：東京法令出版株式会社，1987：297－298.

〔3〕 术文中省略了分母 5!。

$$\frac{1}{5!}(A_1F_1 + A_2F_2 + A_3F_3 + A_4F_4) = A_1C_{n+4}^5 + A_2C_{n+3}^5 + A_3C_{n+2}^5 + A_4C_{n+1}^5$$

这就是所求的三乘方垛积，即 $S_4(n) = \sum_{r=1}^{n} r^4 = \sum_{k=1}^{4} A_4^k C_{4+n+1-k}^{4+1}$。

其他各乘方垛积公式均可仿以上三乘方垛积公式的推演方法获得。

(3) 以求廉式求方垛式

所谓廉式，指二项式

$$(1+x)^m = 1 + C_m^1 x + C_m^2 x^2 + \cdots + C_m^{m-1} x^{m-1} + x^m$$

这里给出了求乘方垛积的第二种方法，即由二项式求乘方垛积公式的方法，术文如下：

平方垛以再乘廉式为原式，立方垛以三乘廉式为原式，三乘垛以四乘廉式为原式。

以其前廉式消原式下第三级以上，则方垛式自然而生矣。

随后以求立方垛、三乘方垛为例说明其演算法则，以下是求三乘方垛积的术例：

又欲求三乘垛式者，以四乘廉式为原式：

$E_1 = 1 + 5n + 10n^2 + 10n^3 + 5n^4 + n^5$　　曰原(E_1)

以三乘廉式下第二级消原式下第三级，

$E_2 = -3 - 10n - 10n^2 + 5n^4 + 2n^5$　　曰子(E_2)

以再乘廉式下第二级消子式下第四级，

$E_3 = 1 + 10n^3 + 15n^4 + 6n^5$　　曰丑(E_3)

以基式下第二级消丑式下第六级，

$E_4 = -n + 10n^3 + 15n^4 + 6n^5$　　曰寅(E_4)

乃四级得空，故不用消焉。

三乘方垛式自然而生矣[1]。

---

〔1〕 松永良弼. 算法全經・垜積[A]. 平山諦，内藤淳編. 松永良弼[C]. 松永良弼刊行会. 東京：東京法令出版株式会社，1987：296.

原式为$(1+n)^5$，与$(1+n)^4$相消，消去n^3，即

$$2(1+n)^5-5(1+n)^4=-3-10n-10n^2+5n^4+2n^5=E_2$$

E_2与$(1+n)^3$相消，消去n^2，即

$$6(1+n)^5-15(1+n)^4+10(1+n)^3=1+10n^3+5n^4+6n^5=E_3$$

E_3与$(1+n)$相消，消去常数项，即

$$6(1+n)^5-15(1+n)^4+10(1+n)^3-(1+n)=-n+10n^3+15n^4+6n^5=E_4$$

这就是所要求的三乘方垛垛积公式（已知约法为30），即

$$S_4(n)=\sum_{r=1}^{n}r^4=\frac{1}{30}(-n+10n^3+15n^4+6n^5)$$

事实上，以上方法表明，对于

$$\begin{aligned}S_p(n)&=1^p+2^p+3^p+\cdots+n^p\\&=\lambda_0 n^{p+1}+\lambda_1 n^p+\lambda_2 n^{p-1}+\cdots+\lambda_{p-1}n^2+\lambda_p n\\S_p(n+1)&=1^p+2^p+3^p+\cdots+n^p+(n+1)^p\\&=S_p(n)+(n+1)^p\end{aligned}$$

必然有

$$\begin{aligned}&\lambda_0(n+1)^{p+1}-\lambda_1(n+1)^p+\lambda_2(n+1)^{p-1}+\cdots+\lambda_{p-1}(n+1)^2+\lambda_p(n+1)\\&=\lambda_0 n^{p+1}+\lambda_1 n^p+\lambda_2 n^{p-1}+\cdots+\lambda_{p-1}n^2+\lambda_p n\end{aligned}$$

以上演算就是根据此关系进行计算的。

3）奇数零垛

（1）奇零衰垛系列

首先定义奇零衰垛系列如下：

奇零圭垛 $D_{1,k}=1+3+5+\cdots+(2k-1)=\sum_{r=1}^{k}(2r-1)$；

奇零三角垛 $D_{2,k}=1+4+9+\cdots+\sum_{r=1}^{k}(2r-1)=\sum_{r=1}^{k}D_{1,r}$；

奇零再乘垛 $D_{3,k}=1+5+14+\cdots+\sum_{r=1}^{k}D_{1,r}=\sum_{r=1}^{k}D_{2,r}$；

… … …

逐如此下去，以奇零 m 乘垛的和式作为奇零 $m+1$ 乘垛的通项，以定义奇零诸乘垛。接着，相对于奇零衰垛，定义基式与基法式：

基　式：一式 $1+x$，三式 $3+x$，五式 $5+x$，七式 $7+x$，九式 $9+x$，…

基法式：一式 $1+x$，二式 $2+x$，三式 $3+x$，四式 $4+x$，五式 $5+x$，…

其次是求零垛式术，即用二项式系数构造奇零衰垛的和式(表 5.10)。

表 5.10

底　子	1	3	5	7	9	11	13
圭	1	4	9	16	25	36	49
三角	1	5	14	30	55	91	140
再乘	1	6	20	50	105	196	336
三乘	1	7	27	77	128	378	714
四乘	1	8	35	112	294	672	1 386
五乘	1	9	44	156	450	1 122	2 508

所谓底子，即 $n=2k-1$，表 5.10 给出的是以下关系：

$$D_{1,n}=\left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$

$$D_{2,n}=\frac{1}{24}(n+1)(n+3)(n+2)$$

$$D_{m,n}=\frac{1}{2^m(m+1)!}(n+1)(n+3)\cdots(n+2m-1)(n+m)$$

事实上，存在关系 $D_{m,k}=2C_{m+k}^{m+1}-C_{m+k-1}^{m}$

接下来，给出了用基式和基法式构造奇零衰垛式的方法：

基式逐相乘，以其法式相乘之，得奇零衰垛[1]。

即方式如下：

奇零圭垛式 $(1+x)(1+x)$ 　　　　4

奇零三角垛式 $(1+x)(3+x)(2+x)$ 　　　　4×6

奇零再乘垛式 $(1+x)(3+x)(5+x)(3+x)$ 　　　　$4\times 6\times 8$

---

〔1〕 松永良弼. 算法全經・垛積[A]. 平山諦，内藤淳編. 松永良弼[C]. 松永良弼刊行会. 東京：東京法令出版株式会社，1987：298.

奇零再乘垛式 $(1+x)(3+x)(5+x)(7+x)(5+x)$ $\qquad 4\times 6\times 8\times 10$

… … …

逐如此下去，构造 $D_{m,n}=\dfrac{1}{2^m(m+1)!}(n+1)(n+3)\cdots(n+2m-1)(n+m)$ 系列公式(表后一列连乘数是约法，即 $2^m(m+1)!$)，其中 $x=n=2k-1$。并将其系数列成数表，即所谓的“奇零衰垛标”(这里从略)。

(2) 奇零方垛系列[1]

所谓奇零方垛(又称作奇数方垛)，指奇数的幂和，即 $\sum_{r=1}^{n}(2r-1)^p$。首先给出“奇零方垛式”，即奇零方垛垛积公式系数表(表 5.11)。

表 5.11

					1	2	1	圭	法 4
				0	2	3	1	三角	法 6
			−1	0	4	4	1	再乘	法 8
		0	−8	0	20	15	3	三乘	法 30
	3	0	−8	0	10	6	1	四乘	法 12
0	32	0	−56	0	42	21	3	五乘	法 42

随后给出以廉式求奇零方垛式的方法：

圭垛以平方廉式为原式，平方垛以再乘廉式为原式，立方垛以三乘廉式为原式，递如此而以前廉式下第二级消原式下第四级以上偶级，而到于上级，则零垛式自然而生矣。

随后以求奇数五乘垛为例说明其演算法则，以下是其术例：

假如今求奇数五乘垛，以六乘廉式为原式：

$E_1=1+7n+21n^2+35n^3+35n^4+21n^5+7n^6+n^7$ 　曰原(E_1)

以四乘廉式下第二级消原式下第四级，

$E_2=-6-28n-49n^2-35n^3+14n^5+7n^6+n^7$ 　曰子(E_2)

以再乘廉式下第二级消前式下第六级，

$E_3=31+63n-56n^3+42n^5+21n^6+3n^7$ 　曰丑(E_3)

[1] 文本中的小标题写成“求零方垛”，应该是“奇零方垛”之误。

以基廉式下第二级消前式下第八级，

$$E_4 = 32n - 56n^3 + 42n^5 + 21n^6 + 3n^7 \qquad \text{曰寅}(E_4)$$

得五乘零垛式。恒倍乘数，加四，以垛式最下级数相乘之，得约法[1]。

为了求 $1^6 + 3^6 + 5^6 + \cdots + (2n+1)^6$，以六乘廉式 $(1+n)^7$ 为原式。

原式 $(1+n)^7$ 与 $(1+n)^5$ 相消，消去 n^4，即

$$(1+n)^7 - 7(1+n)^5 = -6 - 28n - 49n^2 - 35n^3 + 14n^5 + 7n^6 + n^7 = E_2$$

E_2 与 $(1+n)^3$ 相消，消去 n^2，即

$$\begin{aligned} &3(1+n)^7 - 21(1+n)^5 + 49(1+n)^3 \\ &\quad = 31 + 63n - 56n^3 + 42n^5 + 21n^6 + 3n^7 = E_3 \end{aligned}$$

E_3 与 $(1+n)$ 相消，消去常数项，即

$$\begin{aligned} &3(1+n)^7 - 21(1+n)^5 + 49(1+n)^3 - 31(1+n) \\ &\quad = 32n - 56n^3 + 42n^5 + 21n^6 + 3n^7 = E_4 \end{aligned}$$

这就是所要求的奇零五乘垛垛积公式，其约法计算如下：

(乘数×2+4)×(垛积最下级数)=42

以上推演的是以下公式：

$$S_6(2n-1) = \sum_{r=1}^{n}(2r-1)^6 = \frac{1}{42}(32n - 56n^3 + 42n^5 + 21n^6 + 3n^7)$$

4) 方垛衰积

由系列乘方垛积构成的衰垛，便称做方垛衰积，定义如下：

圭衰垛　$S_1(1) + S_1(2) + S_1(3) + \cdots + S_1(n) = \sum \frac{1}{2!}\lambda(\lambda+1)$

平方衰垛　$S_2(1) + S_2(2) + S_2(3) + \cdots + S_2(n) = \sum \frac{1}{3!}\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)$

立方衰垛　$S_3(1) + S_3(2) + S_3(3) + \cdots + S_3(n)$

$$= \sum \frac{1}{4!}\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)$$

---

〔1〕松永良弼. 算法全經・垛積[A]. 平山諦,内藤淳編. 松永良弼[C]. 松永良弼刊行会. 東京：東京法令出版株式会社,1987：300.

三乘方衰垛 $S_4(1)+S_4(2)+S_4(3)+\cdots+S_4(n)$

$$=\sum\frac{1}{5!}\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)(\lambda+4)$$

$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$

方垛衰积的一般形式为 $\sum_{r=1}^{n}S_p(r)$，其和为

$$\sum_{r=1}^{n}S_p(r)=\sum_{r=1}^{n}(n+1-r)r^p=(n+1)\sum_{r=1}^{n}r^p-\sum_{r=1}^{n}r^{p+1}$$

$$=\frac{1}{p+1}\Big[(n+1)^{p+2}-\frac{1}{2}C_{p+1}^{1}(n+1)^{p+1}+B_1C_{p+1}^{2}(n+1)^{p}-B_2C_{p+1}^{4}(n+1)^{p-2}+B_4C_{p+1}^{6}(n+1)^{p-4}-\cdots\Big]-\frac{1}{p+2}\Big[(n+1)^{p+2}-\frac{1}{2}C_{p+2}^{1}(n+1)^{p+1}+B_1C_{p+2}^{2}(n+1)^{p}-B_2C_{p+2}^{4}(n+1)^{p-2}+B_4C_{p+2}^{6}(n+1)^{p-4}-\cdots\Big]$$

$$=\frac{1}{(p+1)(p+2)}\big[(n+1)^{p+2}-B_1C_{p+2}^{2}(n+1)^{p}+3B_2C_{p+2}^{4}(n+1)^{p-2}-\cdots\big]$$

在“方垛衰积之术”中给出以廉术求方垛衰积与以商式求方垛衰积的两种方法。

第一种方法：以廉术求之，即用 $(n+1)^{p+2}$ 的展开式求方垛衰积的公式。

圭衰垛以再乘廉式为原式、平方衰垛以三乘廉式为原式、立方衰垛以四乘廉式为原式。

以前式下第三级消原式下第五级，若原式五乘，则以三乘式消之，若原式六乘，则以四乘式消之，余效于此。次以前式下第三级消原式下第七级，若原式五乘，则用平方廉式，六乘，则用再乘廉式，余仿之。次以前式下第三级消前式下第九级，逐如此，消原式奇级而至于最上级，原式偶乘者，以基式上级消原式上级，故上级恒空[1]。

---

〔1〕 松永良弼.算法全經·垛積[A].平山諦,内藤淳編.松永良弼[C].松永良弼刊行会.東京：東京法令出版株式会社,1987：302.

所述方法与以廉术求方垛积、奇零方垛积的方法类似，这里不再重复。术文之后，给出了三乘方衰垛、四乘方衰垛、五乘方衰垛的求积公式：

三乘方衰垛　$2n+3n^2+20n^3+25n^4+12n^5+2n^6$，法 60

四乘方衰垛　$-2n-7n^2+7n^3+25n^4+35n^5+15n^6+2n^7$，法 84

五乘方衰垛　$4n-10n^2-28n^3+21n^4+84n^5+70n^6+24n^7+3n^8$，法 168

第二种方法：以商式求之，即用“商式”求“方垛衰积”的方法：

圭垛利用三角衰垛式、平方垛利用再乘衰垛式、立方垛利用三乘衰垛式、三乘垛利用四乘衰垛式、……依次类推。所述方法与以商式求方垛积的方法类似。事实上

$$\sum_{r=1}^{n} S_p(r) = \sum_{r=1}^{n}\sum_{k=1}^{r} k^p = \sum_{r=1}^{n}\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{p} A_p^k C_{p+i-k}^{p} = \sum_{k=1}^{p} A_p^k C_{p+n+2-k}^{p+2}$$

由方垛的商式可以求出。术文末给出了一个“商式表”，与方垛场合的商式表完全一致。

5）九因垛

主要讨论“九因垛”与“九因再乘垛”两种垛积。

由 1,2,3,4,5,6,7,8,9 这九个数字中的任意两个数的乘积作为通项的级数，便称作九因垛。

由 1,2,3,4,5,6,7,8,9 这九个数字中的任意三个数的乘积作为通项的级数，便称作九因再垛。

类此，可以定义九因三乘垛、九因四乘垛、……、九因 k 乘垛。

求九因垛积公式的方法如下：

> 求九因垛式术曰：置圭垛式为原式，上级配圭，空也，次级配平方垛，三级配立方垛，各置其积，乘其级数，如圭垛约法二除之，得九因垛积，依遍通术得九因垛式〔1〕。

即

$$\sum_{r=1}^{n} r\sum_{k=1}^{r} k = \sum_{r=1}^{n} rC_{r+1}^{2} = \sum_{r=1}^{n}(C_{r+2}^{3}+2C_{r+1}^{3}) = C_{n+3}^{4}+C_{n+2}^{4}$$

---

〔1〕 松永良弼. 算法全經·垛積[A]. 平山諦，内藤淳編. 松永良弼[C]. 松永良弼刊行会. 東京：東京法令出版株式会社，1987：303.

$$=\frac{1}{24}(2n+9n^2+10n^3+3n^4)$$

求九因再乘垛垛积公式的方法如下：

置九因垛式为原式，上级空，次级配平方垛，三级配立方垛，四级配三乘方垛，五级配四乘方垛，各置其积，乘其级数，以原式约法约之，得九因再乘垛积，依遍通术得九因再乘垛式。

即

$$\sum_{r=1}^{n} r\sum_{k=1}^{r} k\sum_{i=1}^{k} i=\sum_{r=1}^{n} r\sum_{k=1}^{r} \mathrm{C}_{k+1}^{2}=\mathrm{C}_{n+5}^{6}+8\mathrm{C}_{n+4}^{6}+6\mathrm{C}_{n+3}^{6}$$

$$=\frac{1}{48}(6n^2+17n^3+17n^4+7n^5+n^6)$$

逐如此下去，可以依次求出九因三乘垛、九因四乘垛、九因五乘垛、……等九因诸乘垛的垛积公式。《算法全经》没有继续推演下去，而是给出商式表，给出以商式求各垛公式的一般性法则。其商式表如表5.12所示。

表5.12

圭　垛	1	直乃从一至终相并得积也					
九因垛	1	2					用再乘衰垛
九因再乘垛	1	8	6				用四乘垛
九因三乘方垛	1	22	58	24			用六乘衰垛
九因四乘方垛	1	52	328	444	120		用八乘衰垛
九因五乘方垛	1	114	1 452	4 400	3 708	720	用十乘衰垛
		倍之加上二段、次四段、六段、八段也，递仿之加上二段	三倍加上三段、次五段、七段也	四倍加上四段、次六段、八段也	五倍加上五段、次七段、九段也	六倍加上六段、次八段、十段也	

该表下行的文字是对表中数字形成的规律进行了说明：

第一列数全是1；

第二列中的每个数字，等于该列中该数的上一个数的2倍，加上第一列数字的2,4,6,8,…倍(从第一行开始，依次降一行加一倍)，如九因四乘方垛的第

2 列数 $52 = 22 \times 2 + 1 \times 8$；九因五乘方垛的第 2 列数 $114 = 52 \times 2 + 1 \times 10$；

第三列中的每个数字，等于该列中该数的上一个数的 3 倍，加上第二列数字的 3,5,7,9,…倍（从第二行开始，依次而下），如九因四乘方垛的第 3 列数 $328 = 58 \times 3 + 22 \times 7$；九因五乘方垛的第 3 列数 $1\,452 = 328 \times 3 + 52 \times 9$；

第四列中的每个数字，等于该列中该数的上一个数的 4 倍，加上第三列数字的 4,6,8,10,12,…倍（从第三行开始，依次而下），如九因四乘方垛的第 4 列数 $444 = 24 \times 4 + 58 \times 6$；九因五乘方垛的第 4 列数 $4\,400 = 444 \times 4 + 328 \times 8$；

第五列中的每个数字，等于该列中该数的上一个数的 5 倍，加上第四列数字的 5,7,9,11,…倍（从第四行开始，依次而下），如九因五乘方垛的第 5 列数 $3\,708 = 120 \times 5 + 444 \times 7$；

依次类推，可以扩展表 5.12。

事实上，存在这样的关系：

$$n\sum_{r=1}^{k} A_k^r C_{n+2k-r}^{2k} = \sum_{r=1}^{k+1} A_{k+1}^r C_{n+2k+1-r}^{2k+1}$$

商式表 5.12 中的数字便是上式中的 A_k^r。

商式表 5.12 用来求九因各乘垛垛积公式，表中每行数字是对应垛的商式各级 A_1，A_2，A_3，…，A_p。

如求九因再乘垛垛积公式，需要使用四乘衰垛，即 C_{n+5}^6，对 C_{n+5}^6，C_{n+4}^6，C_{n+3}^6 分别乘以商式 $A_1 = 1$，$A_2 = 8$，$A_3 = 6$，并相加，得

$$C_{n+5}^6 + 8C_{n+4}^6 + 6C_{n+3}^6 = \frac{1}{48}(6n^2 + 17n^3 + 17n^4 + 7n^5 + n^6)$$

如求九因三乘垛垛积公式，需要使用六乘衰垛，即 C_{n+7}^8，对 C_{n+7}^8，C_{n+6}^8，C_{n+5}^8，C_{n+4}^8 分别乘以商式 $A_1 = 1$，$A_2 = 22$，$A_3 = 58$，$A_4 = 24$，并相加，得

$$C_{n+7}^8 + 22C_{n+6}^8 + 58C_{n+5}^8 + 24C_{n+4}^8$$

$$= \frac{1}{5\,760}(-48n + 20n^2 + 900n^3 + 2\,015n^4 + 1\,848n^5 + 830n^6 + 180n^7 + 15n^8)$$

6）九字相乘垛

所谓九字相乘垛，即从 a_1，a_2，a_3，…，a_n 个数中选取若干个互不相

同的数的乘积作为通项的级数，选取两个数字叫二字相乘垛，即 $\sum a_p a_q$；选取 3 个数字叫三字相乘垛，即 $\sum a_p a_q a_m$；类似地，可定义 k 字相乘垛。

如果记一字相乘垛为 $D_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i$；二字相乘垛为 $D_2 = \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{n} a_i a_j$；…；$k$ 字相乘垛为 D_k，并且定义 $A_1 = \sum_{i=1}^{n} D_k$ 为主积；$A_2 = \sum_{i=1}^{n} D_k^2$ 为平方积；$A_3 = \sum_{i=1}^{n} D_k^3$ 为立方积；…；$A_p = \sum_{i=1}^{n} D_k^p$ 为 $p-1$ 乘方积，则《算法全经》给出了以下系列公式：

$$
\begin{aligned}
D_1 &= A_1 \\
D_2 &= A_1 D_1 - A_2 \\
D_3 &= A_1 D_2 - A_2 D_1 + A_3 \\
D_4 &= A_1 D_3 - A_2 D_2 + A_3 D_1 - A_4 \\
D_5 &= A_1 D_4 - A_2 D_3 + A_3 D_2 - A_4 D_1 + A_5 \\
&\cdots \quad \cdots \quad \cdots
\end{aligned}
$$

即以 A_1，A_2，A_3，…表示 a_1，a_2，a_3，…，a_n 的基本对称函数 D_1，D_2，D_3，…

7）超位相乘垛

在 1，2，3，4，…，n 这 n 个数字中选取相隔 k 个数的两个数积作为通项的级数，所谓九字相乘垛，分别定义如下：

超位相乘垛 $1\times 3 + 2\times 4 + 3\times 5 + \cdots + n(n+2)$

$$= \sum_{r=1}^{n} r(r+2) = \sum_{r=1}^{n} r^2 + \sum_{r=1}^{n} 2r = S_2 + 2S_1$$

超二位相乘垛 $1\times 4 + 2\times 5 + 3\times 6 + \cdots + n(n+3)$

$$= \sum_{r=1}^{n} r(r+3) = \sum_{r=1}^{n} r^2 + \sum_{r=1}^{n} 3r = S_2 + 3S_1$$

超三位相乘垛 $1\times 5 + 2\times 6 + 3\times 7 + \cdots + n(n+4)$

$$= \sum_{r=1}^{n} r(r+4) = \sum_{r=1}^{n} r^2 + \sum_{r=1}^{n} 4r = S_2 + 4S_1$$

… … …

8）方垛带衰段

所谓方垛带衰段数，即在衰垛积的级数各项分别乘上相应的乘方垛级数各项，其积为通项而构成的级数，分别定义如下：

平方垛带圭积段数：$1\times1^2+3\times2^2+6\times3^2+10\times4^2+\cdots+\frac{1}{2}k(k+1)k^2+\cdots+\frac{1}{2}n(n+1)n^2=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}k(k+1)k^2=\frac{1}{2}[S_4(n)+S_3(n)]$

立方垛带三角垛：$1\times1^3+4\times2^3+10\times3^3+20\times4^3+\cdots+$

$$\frac{1}{6}k(k+1)(k+2)k^3+\cdots+\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)n^3$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{6}k(k+1)(k+2)k^3=\frac{1}{6}[S_6(n)+3S_5(n)+2S_4(n)]$$

… … …

在《算法全经·垛积》的书末有“超垛之术”，列举垛积术应用的 4 个例题，随后是标题为“垛术余毫”的附录，讨论各类垛的商式。

第一是方垛商式：

以平方垛为实，以三角衰垛形为法的商式为 $1+x$，即

$$\sum_{k=1}^{\infty}k^2x^{k-1}:\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k(k+1)}{2!}x^{k-1}=1+x$$

以立方垛为实，以再乘衰垛形为法的商式为 $1+4x+x^2$，即

$$\sum_{k=1}^{\infty}k^3x^{k-1}:\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k(k+1)(k+2)}{3!}x^{k-1}=1+4x+x^2$$

以三乘方垛为实，以三乘衰垛形为法的商式为 $1+11x+11x^2+x^3$，即

$$\sum_{k=1}^{\infty}k^4x^{k-1}:\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4!}x^{k-1}=1+11x+11x^2+x^3$$

… … …

一般地，$\sum_{k=1}^{\infty}k^m x^{k-1}:\sum_{k=1}^{\infty}C_{k+m-1}^{m}x^{k-1}=\sum_{i=1}^{m}a_m^i x^{i-1}$

第二是九因垛的商式：

对于 $n=1, 2, 3, 4, \cdots$，其九因垛是 1，7，25，65，140，…，其相邻两项差为 1，6，18，40，75，…，分别以这些差为系数，构造幂级数

$$f(x)=1+6x+18x^2+40x^3+75x^4+\cdots$$

设
$$g(x)=1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots=\frac{1}{1-x}$$

计算 $f(x)\div g(x)=f_1(x)=1+5x+12x^2+22x^3+35x^4+\cdots$

指出其系数是 $f(x)$ 系数的相邻系数差，继续做除法，计算

$$f_1(x)\div g(x)=f_2(x)=1+4x+7x^2+10x^3+13x^4+\cdots$$

其系数是 $f_1(x)$ 系数的相邻系数差，继续除下去，都有这样的规律。

最后得到

$$(1+2x)[\,g(x)]^4=f(x)$$
$$(1+2x)[\,g(x)]^5=1+7x+25x^2+65x^3+140x^4+\cdots$$

根据以上系数变化规律，列出九因垛数列的招差表：

$$\begin{array}{ccccccccccc}
1 & & 7 & & 25 & & 65 & & 140 & & \cdots \\
& 6 & & 18 & & 40 & & 75 & & \cdots & \\
& & 12 & & 22 & & 35 & & \cdots & & \\
& & & 10 & & 13 & & \cdots & & & \\
& & & & 3 & & 3 & \cdots & & &
\end{array}$$

接下来，讨论九因再乘垛的商式，即由九因再乘垛 1，15，90，350，1 050，…作为系数构成的多项式的商式的系数变化规律，计算过程与方法和上面一样，这里不再赘述。

2.《太阴率》中的垛积内容

在稿本《太阴率》中，松永良弼构造了所谓的“太阴率”，以解决方垛公式的推演。太阴率指分数序列：

$$\frac{1}{12},\ \frac{1}{60},\ \frac{1}{42},\ \frac{1}{40},\ \frac{5}{198},\ \frac{691}{27\,300},\ \frac{35}{1\,382},\ \frac{3\,617}{141\,800},\ \cdots$$

其推演方式如下：

求太阴率演段

以一为基数。

置基数,半之,得二分之一,为原数。

置基数,取三分之一,以减原数,余二除之,为子。

置基数,取五分之一,以减原数,余四除之,得数以减子,余三除、二除之,为丑。

置基数,取七分之一,以减原数,余六除之,得数以减子,余五除、四除之,得数以减丑,余三除、二除之,为寅。

置基数,取九分之一,以减原数,余八除之,得数以减子,余七除、六除之,得数以减丑,余五除、四除之,得数以减寅,余三除、二除之,为卯。

置基数,取一十一分之一,以减原数,余一十除之,得数以减子,余九除、八除之,得数以减丑,余七除、六除之,得数以减寅,余五除、四除之,得数以减卯,余三除、二除之,为辰。

递如此求巳、午、未、申、酉诸率[1]。

这段术文的意思如下,首先依次计算出:

$$原数\ a_0=\frac{1}{2}$$

$$子\ a_1=\frac{1}{2}\left(a_0-\frac{1}{3}\right)$$

$$丑\ a_2=\frac{1}{2\cdot 3}\left[a_1-\frac{1}{4}\left(a_0-\frac{1}{5}\right)\right]$$

$$寅\ a_3=\frac{1}{2\cdot 3}\left\{a_2-\frac{1}{4\cdot 5}\left[a_1-\frac{1}{6}\left(a_0-\frac{1}{7}\right)\right]\right\}$$

$$卯\ a_4=\frac{1}{2\cdot 3}\left\{a_3-\frac{1}{4\cdot 5}\left[a_2-\frac{1}{6\cdot 7}\left(a_1-\frac{1}{8}\left(a_0-\frac{1}{9}\right)\right)\right]\right\}$$

…… …… ……

〔1〕 松永良弼. 太陰率[A]. 平山諦,内藤淳編. 松永良弼[C]. 松永良弼刊行会. 東京:東京法令出版株式会社,1987.

即相当于

$$a_0 = \frac{1}{2}$$

$$a_1 = \frac{1}{2!}a_0 - \frac{1}{3!}$$

$$a_n = \frac{1}{3!}a_{n-1} - \frac{1}{5!}a_{n-2} + \frac{1}{7!}a_{n-3} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n-1)!}a_1 + (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n)!}a_0 + (-1)^{n+2} \frac{1}{(2n+1)!}$$

根据此进行迭代演算，依次得到 a_1，a_2，a_3，a_4，…

对此迭代式两边同乘$(2n+1)!$，可变形为

$$1 - a_0 C_{2n+1}^1 + 2!a_1 C_{2n+1}^2 - 4!a_2 C_{2n+1}^4 + \cdots + (-1)^n (2n-2)!a_{n-1} C_{2n+1}^{2n} + (-1)^{n+1}(2n)!a_n C_{2n+1}^1 = 0$$

将此式与《括要算法》元卷中的伯努利数循环公式

$$0 = 1 - B_0 C_{2n+1}^1 + B_1 C_{2n+1}^2 - B_2 C_{2n+1}^4 + B_3 C_{2n+1}^6 - \cdots$$

（这里，$B_0 = \frac{1}{2}$，$B_1 = \frac{1}{6}$，$B_2 = \frac{1}{30}$，$B_3 = \frac{1}{42}$，$B_4 = \frac{1}{30}$，$B_5 = \frac{5}{66}$，…）

进行比较，则得出以下关系式

$$a_0 = B_0 = \frac{1}{2},\ a_1 = \frac{B_1}{2!} = \frac{1}{12},\ a_2 = \frac{B_2}{4!} = \frac{1}{720},\ a_3 = \frac{B_3}{6!} = \frac{1}{30\ 240},\ \cdots$$

于是得到太阴率各率：

$$甲率\ A_1 = a_1 = \frac{B_1}{1} \cdot \frac{1}{2!} = \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{B_1}{1}$$

$$乙率\ A_2 = \frac{a_2}{a_1} = \frac{B_2}{B_1} \cdot \frac{2!}{4!} = \frac{1}{3 \cdot 4} \cdot \frac{B_2}{B_1}$$

$$丙率\ A_3 = \frac{a_3}{a_2} = \frac{B_3}{B_2} \cdot \frac{4!}{6!} = \frac{1}{5 \cdot 6} \cdot \frac{B_3}{B_2}$$

$$丁率\ A_4 = \frac{a_4}{a_3} = \frac{B_4}{B_3} \cdot \frac{6!}{8!} = \frac{1}{7 \cdot 8} \cdot \frac{B_4}{B_3}$$

…　…　…

由伯努利数导出太阴率后，接下来在“太阴率用法”部分，松永良弼用太阴率确定乘方垛 $\sum_{r=1}^{n} r^k$ 的各级系数(图 5.3)。

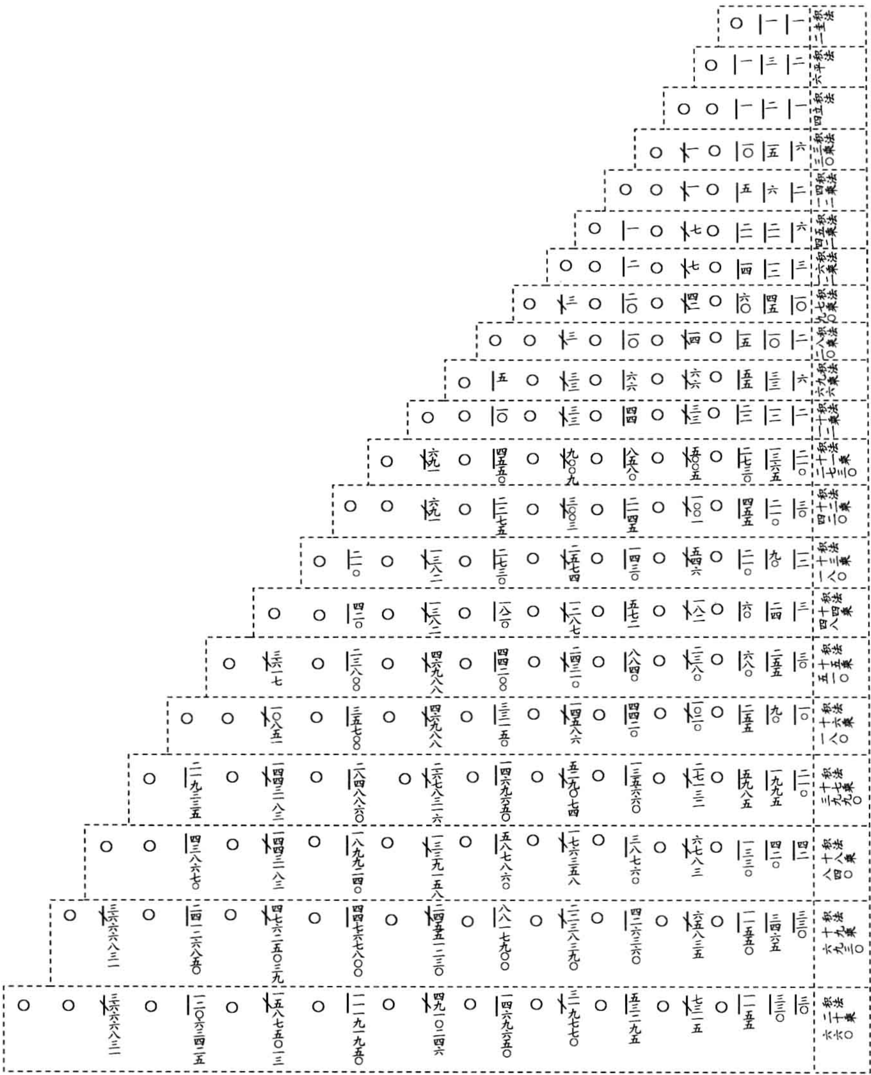


图 5.3　《太阴率》中的方垛各级系数表

松永良弼也给出了由幂指数为偶数的乘方垛 $\sum_{r=1}^{n} r^k$ 的各级系数，导出幂指数为奇数的乘方垛 $\sum_{r=1}^{n} r^{k+1}$ 的各级系数。其法则叙之如下：

偶乘者起于前奇乘者也[立方垛起于平方垛，四乘垛起于三乘垛，六乘垛起于五乘垛，逐如此]。列前奇乘垛式于最上空级之上，又设空一级而其见数[但下第二级数及空级皆不与也]，上一级一除之，次级二除之，三级三除之[假如七乘垛起八乘垛者，七乘垛最上级三，一除之，得三为八乘垛上级数，七乘垛次级二十，二除之，得一十为八乘垛次级数，七乘垛三级四十二，三除之，得一十四为八乘垛三级数，七乘垛四级六十，四除之，得一十五为八乘垛四级数，七乘垛最下级一十，以五除之，得二为八乘垛最下级数，余皆仿之]，逐如此到最下级。置前奇乘垛积法，倍之为实，以后奇乘数除之，为其积法[七乘垛积法九十，倍之得一百八十，为实，以后奇乘数九除之，得二十，为八乘垛积法，余皆仿之]。置积法，折半之，为下第二级数也[1]。

设奇乘垛($k=2t$)的和式为

$$S_k = \sum_{r=1}^{n} r^k$$
$$= \frac{1}{m_k}(A_1 n + A_3 n^3 + A_5 n^5 + A_7 n^7 + \cdots + A_{k-3} n^{k-3} + A_{k-1} n^{k-1} + A_{k+1} n^{k+1})$$

通过下列演算：

$$\frac{A_1}{1} = a_2,\ \frac{A_3}{2} = a_4,\ \frac{A_5}{3} = a_6,\ \frac{A_7}{4} = a_8,\ \cdots,\ \frac{A_{k-1}}{k \div 2} = a_k,$$
$$\frac{A_{k+1}}{(k+2) \div 2} = a_{k+2},\ \frac{2m_k}{k+1} = m_{k+1},\ \frac{m_{k+1}}{2} = a_{k+1}$$

得到偶乘垛($k+1=2t+1$)的和式为

$$S_{k+1} = \sum_{r=1}^{n} r^{k+1}$$
$$= \frac{1}{m_{k+1}}(a_2 n^2 + a_4 n^4 + a_6 n^6 + a_8 n^8 + \cdots + a_{k-2} n^{k-2} + a_k n^k + a_{k+2} n^{k+2})$$

不过，松永这样推演垛积公式的方法并不比《括要算法》中关孝和的方法简便。

在松永良弼的《集汇算法》(著作时间不详)中，又载有倍垛系列，即

---

〔1〕 松永良弼.太陰率[A].平山諦，内藤淳編.松永良弼[C].松永良弼刊行会，東京：東京法令出版株式会社，1987：196.

倍垛：$A+Aa+Aa^2+Aa^3+Aa^4+\cdots+Aa^{n-1}=A\cdot\dfrac{a^{n-1}}{a-1}\ (a>1)$

$$A+Aa+Aa^2+Aa^3+Aa^4+\cdots+Aa^{n-1}=A\cdot\frac{1-a^n}{1-a}\ (a<1)$$

（以上两垛又称作增垛）

损垛：$A-Aa-Aa^2-Aa^3-Aa^4-\cdots-Aa^{n-1}$

$$=A\cdot\frac{1-a(2-a^{n-1})}{1-a}\ (a<1)$$

三角倍垛：

$$A+(A+Aa)+(A+Aa+Aa^2)+(A+Aa+Aa^2+Aa^3)+\cdots+(A+Aa+Aa^2+Aa^3+Aa^4+\cdots+Aa^{n-1})$$

类似地，定义再乘倍垛、三乘倍垛等，其增垛与损垛是增约术在垛积问题中的应用。

松永良弼的垛积招差术为有马赖徸（Arima Yoriyuki，1714～1783）的《拾玑算法》（1769）所继承，该书系统记载了各类垛积术，包括方垛系列、衰垛系列、方衰垛系列、九因垛系列、九字相乘垛系列、倍垛系列、方垛带衰段、减衰垛系列、奇零衰垛系列、方垛相乘垛系列、超位相乘垛系列等，大体与松永良弼的《算法全经・垛积》的内容类似[1]。

5.3.3 幕末和算家的垛积术

最上流和算家会田安明（Aida Yasuaki，1747～1817）所著《算法垛叠术》（著作时间不详）三卷，是和算发展后期十分重要的关于垛积术研究的专门著述，上卷论衰垛与方垛，方法类于《括要算法》和《拾玑算法》；中卷论奇数垛、偶数垛、奇偶算、相乘垛、隔一格相乘垛、奇数平方垛、偶数平方垛；下卷是关于垛积应用的例题。

在奇数垛中，讨论了 $\sum_{r=1}^{n}(2r-1)=n^2$，$\sum_{r=1}^{n}(4r-3)=2n^2-n$，

〔1〕林鹤一. 垛術、索術及ビ招差法ニ就テ[A]. 林鹤一遺著刊行会編. 林鹤一博士和算研究集録上卷. [C]. 東京：開成館，1937：227.

$\sum_{r=1}^{n}(6r-5)=3n^2-2n$ 等系列的垛积；

在偶数垛中，讨论 $\sum_{r=1}^{n}(2r)=n(n+1)$，$\sum_{r=1}^{n}(4r-2)=2n^2$，$\sum_{r=1}^{n}(6r-4)=3n^2-n$ 等系列的垛积；

在奇偶算部分，是关于奇数垛、偶数垛的应用，即解 $\begin{cases}x-n^2=a\\x-n(n-1)=b\end{cases}$ 类型的方程；

在相乘垛中，讨论了 $\sum_{r=1}^{n}r(r+1)=\frac{n^3+3n^2+2n}{3}$，$\sum_{r=1}^{n}2r(2r-1)=\frac{4n^3+3n^2-n}{3}$，$\sum_{r=1}^{n}(4r-3)(4r-2)=\frac{6n^3-6n^2-4n}{3}$ 等系列的垛积；

奇数平方垛，即 $\sum_{r=1}^{n}(2r-1)^2=\frac{4n^3-n}{3}$；偶数平方垛，即 $\sum_{r=1}^{n}(2r)^2=\frac{4n^3+6n^2+2n}{3}$。

在垛积术研究中，会田安明没有多少创造性工作，只是试图在形式上与关流垛术加以区别。

关流和算家和田宁（Wata Yasushi，1787～1840）没有专门的垛积术研究著作，但在其稿本著作《截背术》（著作时间不详）中，出现了所谓的“伏衰垛”，是幕末和算研究的新成果，特别引人注目。

其伏衰垛系列如表 5.13 所示。

表 5.13　伏衰垛系列

0	0	0	1	1	1	1	1	1	
0	0	1	2	3	4	5	6	7	圭垛
0	1	2	4	7	11	16	22	29	一乘伏衰垛
1	2	4	8	15	26	42	64	93	二乘伏衰垛
1	3	7	15	30	56	98	162	255	三乘伏衰垛
1	4	11	26	56	112	210	372	627	四乘伏衰垛
1	5	16	42	98	210	420	792	1 419	五乘伏衰垛
				…	…	…			

在此系列伏衰垛中，圭垛的一阶差分都相等；一乘伏衰垛的二阶差分都相等；二乘伏衰垛的三阶差分都相等；……；k 乘伏衰垛的 $k+1$ 阶差分都相等。

他不仅处理了以上特殊的伏衰垛求和问题，而且还讨论一般情形的伏衰垛问题。

设原数列为 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_k, \cdots, a_n$，

一阶差数列为 $\Delta_1^1, \Delta_2^1, \Delta_3^1, \cdots, \Delta_{n-1}^1$，

二阶差数列为 $\Delta_1^2, \Delta_2^2, \Delta_3^2, \cdots, \Delta_{n-2}^2$，

…　…　…

k 阶差数列为 $\Delta_1^k, \Delta_2^k, \Delta_3^k, \cdots, \Delta k_{n-k}^k$，

和田宁指出，当 $\Delta_1^k = \Delta_2^k = \Delta_3^k = \cdots = \Delta k_{n-k}^k$ 时，则

$$a_n = a_1 + (n-1)\Delta_1^1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2!}\Delta_1^2 + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3!}\Delta_1^3 + \cdots + \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-k)}{k!}\Delta_1^k \tag{5.21}$$

此即牛顿插值公式。和田宁把以上逐求各阶差分的方法叫“参差逐减术”，把 $a_1, \Delta_1^1, \Delta_1^2, \cdots, \Delta_1^k$ 分别称作东、冬、江[1]、……把这些系数按 n 的升幂排列成所谓的“推辷表”（又称做招差正表，见表 5.14）。把式(5.21)表述为“东表乘以东、冬表乘以冬、……相并，得其段积”。

表 5.14　推辷表

微	支	江	冬	东	表号
丨二四	╲丨六	丨二	╲丨一	丨一	乘某段
╲丨五〇	╲丨一一	╲丨三	丨一		乘某段巾
丨三五	╲丨六	丨一			乘某段再
╲丨一〇	丨一				乘某段三
丨一					乘某段四
二四	六	二	一		除数
五	四	三	二	一	原法

[1] 中国古代的声韵，依次为东、冬、江、支、微、鱼、虞、齐、佳、灰、真、文、元、寒、删，常被用作排序符号。辷，日文汉字，滑，滑行的意思。

推乚表

	n^0	n^1	n^2	n^3	n^4	除　数
东	1					
冬	−1	1				1
江	2	−3	1			2
支	−6	11	−6	1		6
微	24	−50	35	−10	1	24
	…	…	…	…	…	

推乚表在和田宁的圆理计算中发挥着重要的作用，特别是他在编制各类圆理叠表时，经常使用推乚表。

幕末和算家御粥安本（Gokayu Yasumoto，1794～1862）与平野喜房（Hirano Kibo，生卒年不详）师徒采用衰垛公式来求方垛积。御粥安本在其《方垛衰垛术解义》（时间不详）中，给出一个用衰垛表示乘方垛的公式。

若记乘方垛积为

$$S_p = \sum_{k=1}^{n} k^p,$$

衰垛积为

$$\lambda_m = \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}{(m+1)!},$$

则演算如下：

$$S_1 = \lambda_1,$$
$$S_2 = 2\lambda_2 - S_1,$$
$$S_3 = 6\lambda_3 - 3S_2 - 2S_1,$$
$$S_4 = 24\lambda_4 - 6S_3 - 11S_2 - 6S_1,$$
$$\cdots \quad \cdots$$

并且给出计算式

$$S_1 = \lambda_1,$$
$$S_2 = 2\lambda_2 - \lambda_1,$$
$$S_3 = 6\lambda_3 - 6\lambda_2 + \lambda_1,$$
$$S_4 = 24\lambda_4 - 36\lambda_3 + 14\lambda_2 - \lambda_1,$$
$$S_5 = 120\lambda_5 - 240\lambda_4 + 150\lambda_3 - 30\lambda_2 + \lambda_1,$$

$$S_6 = 720\lambda_6 - 1\ 800\lambda_5 + 1\ 560\lambda_4 - 540\lambda_3 + 62\lambda_2 - \lambda_1,$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

御粥安本的弟子平野喜房在其《浅致算法》(1863)中也论述了垛积问题,对御粥安本的垛积公式进行了详细的解释,其术文如下[1]:

术曰:置底子,加一个名甲;加一个名乙;加一个名丙;加一个名丁;逐如此求干名。置底子,乘甲[二除],名子;乘乙[三除],名丑;乘丙[四除],名寅;乘丁[五除],名卯;逐如此求支名。而依左图式得各方垛积,合问。

圭垛积	子
平方垛积	2 丑－子
立方垛积	6 寅－6 丑＋子
三乘方垛积	24 卯－36 寅＋14 丑－子
四乘方垛积	120 辰－240 卯＋150 寅－30 丑＋子
五乘方垛积	720 巳－1 800 辰＋1 560 卯－540 寅＋62 丑－子

即

$$子\ \lambda_1 = \frac{n(n+1)}{2!},$$

$$丑\ \lambda_2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{3!},$$

$$寅\ \lambda_3 = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4!},$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

显然,$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots, \lambda_k$是衰垛积系列,术文所述方垛积表达式如下:

$$S_1 = \lambda_1,$$

$$S_2 = 2\lambda_2 - \lambda_1,$$

$$S_3 = 6\lambda_3 - 6\lambda_2 - \lambda_1,$$

$$S_4 = 24\lambda_4 - 36\lambda_3 + 14\lambda_2 - \lambda_1,$$

$$S_5 = 120\lambda_5 - 240\lambda_4 + 150\lambda_3 - 30\lambda_2 + \lambda_1,$$

$$S_6 = 720\lambda_6 - 1\ 800\lambda_5 + 1\ 560\lambda_4 - 540\lambda_3 + 62\lambda_2 - \lambda_1,$$

---

〔1〕 学士院.明治前日本数学史.第五卷[M].東京:野間科学医学研究資料館,1979:21.

一般地，$S_k = a_k\lambda_k - a_{k-1}\lambda_{k-1} + a_{k-2}\lambda_{k-2} - a_{k-3}\lambda_{k-3} + \cdots + (-1)^{k-1}\lambda_1$，

$$S_{k+1} = b_{k+1}\lambda_{k+1} - b_k\lambda_k + b_{k-1}\lambda_{k-1} - b_{k-2}\lambda_{k-2} + \cdots + (-1)^{k+1}\lambda_1。$$

对于其系数规律，书中说明如下：

最下级：其级段数各定一；

自右第二级：置已级段数，加其下级段数，二之，为次级段数；

自右第三级：置已级段数，加其下级段数，三之，为次级段数；

自右第四级：置已级段数，加其下级段数，四之，为次级段数。

即 $b_2 = 2(a_2 + 1)$，$b_3 = 3(a_3 + a_2)$，$b_4 = 4(a_4 + a_3)$，…，$b_k = k(a_k + a_{k-1})$，$b_{k+1} = (k+1)a_k$。

本章小结

垛积术知识在明代数学中没有获得进步，清初梅文鼎仅以垛积解释《授时历》中的三差法，对垛积知识并无发挥，直至陈世仁（1676～1722）著《少广补遗》，中国数学家才对垛积问题重新进行系统研究，垛积知识也在清代学者的数学研究中获得应用，如汪莱（1768～1813）《衡斋算学》（1799）第四册中，推求论证其组合公式时，借用了垛积知识，董祐诚（1791～1823）在《垛积求积术》（1821）中，以连比例四率法并结合垛积求积术，进行三角函数的级数展开。清末李善兰（1811～1882）集前人之大成，撰《垛积比类》，系统地研究了各类垛积，除三角垛和三角变垛包含了朱世杰落一形和岚峰形两类垛积外，又创立了三角自乘垛和乘方垛两类新垛。综观清代学者的垛积术研究，普遍受到比类“少广”观点的影响，从而他们对垛积知识的认识始终难以摆脱几何观念的束缚，加上没有符号代数方法，使清代以语言代数叙述的垛积知识，带有浓郁的几何色彩。

关孝和将招差术与垛积术结合起来，娴熟地利用他的代数分析法，使和算的垛积研究形成代数化特征，而使垛积术成为多项式理论的一部分，这一传统在久留岛义太、松永良弼的垛积研究中得到加强，尤其是他们的方法，更具有算法化特点。和算家所获得的垛积成果被他们广泛运用于无穷级数研究，推动了圆理方法的进步。

第 6 章
同余式组与不定方程解法：剪管术与剩一术

设整数 N 分别被两两互素的 n 个整数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 相除，分别得到余数 $R_1, R_2, \cdots, R_n$，即 $N \equiv R_i \pmod{a_i}$ $(i=1, 2, \cdots, n)$，求 N。这样的数学问题称做一次同余式组求解问题，其中 R_i 称作余数，a_i 称作模数。

对于整数 a, b, c，一次不定方程 $ax-by=c$ 等价于 $ax \equiv c \pmod{b}$，所以一次不定方程与一次同余式之间有着内在的联系。它们是初等数论中一个最基本的不定分析问题，历史源远流长，在古代中国和印度较为发达，特别在中国南宋时期达到顶峰。江户时代的和算家正是从南宋杨辉的著作中接受了这一算法传统，并且独立地获得了与秦九韶“大衍总数术”算法程序一致的算法，称作“剪管术”与“剩一术”。

6.1　中国剩余定理与大衍总数术

中算中求解一次同余式组问题最早出现于南北朝时期的《孙子算经》，该书卷下载有著名的“物不知数”问题，问题如下：

> 今有物不知其数，三三数之剩二，五五数之剩三，七七数之剩二，问物几何？

相当于求解一次同余组

$$N \equiv 2 \pmod{3} \equiv 3 \pmod{5} \equiv 2 \pmod{7}$$

题后《孙子算经》叙述了这个问题的解法：

> 三三数之剩二，置一百四十；五五数之剩三，置六十三；七七数之剩二，置三十。并之，得二百三十三，以二百十减之，即得[1]。

术文给出的算法公式为

$$N = 70 \times 2 + 21 \times 3 + 15 \times 2 - 2 \times 105 = 23$$

即给出了符合条件的最小自然数解 23。式中的模数 3，5，7 是两两互素的，其中的 105 是模数 3，5，7 的最小公倍数。

对于一般的余数 R_1，R_2，R_3情形，上述公式的一般形式为

$$N = 70R_1 + 21R_2 + 15R_3 - 105p \ (p \in \mathbf{Z})$$

其算法的核心是如何确定公式中的系数 70，21 和 15，《孙子算经》并没有明确指出。

"物不知数"问题可推广至一般情形：

对于
$$N \equiv R_i (\bmod a_i) \ (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{6.1}$$

可求出相应的一组系数 k_i，使得

$$k_i \frac{M}{a_i} \equiv 1 (\bmod a_i) \ (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{6.2}$$

其中：$M=[a_1, a_2, \cdots, a_n]$，$M_i = M \div a_i$，则满足一次同余组(6.1) 的最小正整数解是

$$N = \sum_{i=1}^{n} R_i k_i M_i - pM \ (p \in \mathbf{Z}) \tag{6.3}$$

这就是今天数论著作和数学史著作中所称的中国剩余定理或孙子定理。

"物不知数" 问题作为数学游戏在中国古代广为流传，而且有很多名称，南宋学者周密(1232 ~ 1298) 在其《志雅堂杂抄》中称之为"鬼谷算" 和"隔墙算"，并将其求解公式括为诗歌：

> 三岁孩儿七十稀，五留廿一事尤奇。七度上元重相会，寒食清明便

---

[1] 孙子算经[A]. 郭书春主编. 中国科学技术典籍通汇 · 数学卷[Z]. 第 1 册. 郑州：河南教育出版社，1993：243.

可知[1]。

诗句中的七十、廿一、上元，分别指求解公式中的三个系数 70，21，15。

南宋数学家杨辉把“物不知数”问题称作“秦王暗点兵”和“剪管术”。明代数学家程大位（1533～1606）在《算法统宗》（1592）中称之为“物不知总”、“韩信点兵”，并将其算法编成歌诀曰：

三人同行七十稀，五树梅花廿一枝，七子团圆正半月，除百零五便得知[2]。

关于中国古代一次同余问题的起源，一般认为它除数学游戏这一背景外，还有天文历法方面的科学背景，它与历法中推求“上元积年”问题有密切关系。历法要根据天体的运动周期进行推算，因此需要规定一个时间推算的起点——“历元”，所有周期的公共推算起点，就叫做“上元”，把从上元到编历年所累积的年数叫做“上元积年”。自西汉《三统历》迄元代《授时历》，上元积年的推算是中国传统历法推算的核心问题。

上元积年的推算本质上就是求解一组一次同余式。设 a 是一回归年长度的日数，b 是一朔望月长度的日数，一甲子循环周期的日数为 60，如果规定以冬至时刻、合朔时刻、甲子日的子时（即 0 时），三者会合的时刻作为历元，并且测出当年冬至距甲子日零时的时间间隔是 R_1 日，离平朔时刻的时间间隔是 R_2 日，那么上元积年 N 则可由下列同余组：

$$aN \equiv R_1 \pmod{60} \equiv R_2 \pmod{b}$$

解出。

南北朝时期数学家祖冲之在其《大明历》（462）中，还要求历元所在的年必须是甲子年，且要求“日月合璧”、“五星联珠”，即日、月、五大行星等七个天体同会于一处，同时还要求月亮又恰好运行在它的近地点和黄白交点的升交点，同时也是日月食发生的时刻，在这样众多约束条件之下推算上元积年，本质上需要求解一个由十个同余式构成的同余式组[3]：

---

〔1〕 周密. 志雅堂杂抄[M]. 粤雅堂丛书本，咸丰三年（1853）刊.

〔2〕 程大位. 算法统宗[A]. 郭书春主编. 中国科学技术典籍通汇·数学卷[Z]. 第 1 册. 郑州：河南教育出版社，1993：1307.

〔3〕 曲安京. 中国古代历法中的上元积年的推算[A]. 李迪主编. 数学史研究文集[C]. 第一辑. 内蒙古大学出版社，台湾九章出版社，1990：24.

$$aN \equiv R_i (\bmod b_i)$$

解此同余式组并非易事。由于中国历法的神秘性，历史文献中没有留下推算上元积年的算法记录，今天不详其如何推算。

南宋时期，秦九韶在其《数书九章》(1247) 中对一次同余式组求解方法作出了总结，构造了更具一般性算法，称之为“大衍总数术”。

对于求解同余式组(6.1)，关键是要选定满足条件：

$$k_i \frac{M}{a_i} \equiv 1 (\bmod a_i)$$

的一组系数 k_i。秦九韶把这组系数 k_i 称做“乘率”，并设计了求乘率的机械化算法 ——“大衍求一术”。

不仅如此，《孙子算经》“物不知数” 问题只处理模数两两互素情形的同余式组，而秦九韶处理的是任意模数(称作问数) 的同余式组，算法更具一般性。

对于同余式组

$$N \equiv R_i (\bmod A_i) \ (i=1, 2, \cdots, n) \tag{6.4}$$

秦九韶的“大衍总数术”解法分为三个步骤：

第一步，将问数 A_i 化为两两互素的定母 a_i，使

$$(a_i, a_j) = 1 \ (i \neq j), \ a_i \mid A_i, \text{且} [a_1, a_2, \cdots, a_n] = [A_1, A_2, \cdots, A_n] = M$$

为此，秦九韶设计了“两两连环求等，约奇弗约偶”[1]，“复乘求定”等算法程序，以将模数化约成两两互素。

第二步，设计了“大衍求一术”求乘率 k_i，使 $k_i g_i \equiv 1 (\bmod a_i)$，这里 $\frac{M}{a_i} = M_i$ 称作衍数，$M_i \equiv g_i (\bmod a_i)$ $(g_i < a_i)$，g_i 称作奇数，即 $k_i g_i \equiv$

---

〔1〕 关于奇、偶的数学意义，《数书九章》没有明确表述，今人不明其意。关于这一问题的详细讨论，请参阅：(1) 李继闵. 关于“大衍总数术”中求定数算法的探讨[A]. 吴文俊主编. 秦九韶与《数书九章》[C]. 北京：北京师范大学出版社，1987：202－234. (2) 梁衍章. 秦九韶大衍术中求定数方法新释[J]. 哈尔滨师范大学学报(自然科学版)，1988(4)：12－15. (3) 钱克仁. 秦九韶大衍求一术中的定数问题[A]. 第三届国际中国科技史研讨会论文[C]. 北京：科学出版社，1990：31－43. (4) 梅荣照. 秦九韶是如何得出求定数方法的[J]. 自然科学史研究，1987，6(4)：293－298. (5) 王渝生. 秦九韶求定数方法的成就与缺陷[J]. 自然科学史研究，1987，6(4)：299－307.

$k_iM_i \equiv 1 (\bmod a_i)$。

如果 $M_i = \dfrac{M}{a_i} > a_i$，秦九韶首先令 a_i 除 M_i，求得余数 $g_i < a_i$，那么 $M_i \equiv g_i (\bmod a_i)$，于是 $k_iM_i \equiv k_ig_i (\bmod a_i)$，但是因为 $k_iM_i \equiv 1 (\bmod a_i)$，所以问题归结为求 k_i 使适合 $k_ig_i \equiv 1 (\bmod a_i)$。

秦九韶的“大衍求一术”以定数 a_i 与奇数 g_i 作辗转相除，相继得商数 q_1，q_2，…，q_n 和余数 r_1，r_2，…，r_n，在辗转相除的时候，随即迭代算出下面右列的 c_k 值：

	各次商 q_k	各次余数 r_k	归算 c_k 的值
a_i / g_i	q_1	r_1	$c_1 = q_1$
g_i / r_1	q_2	r_2	$c_2 = c_1q_2 + 1$
r_1 / r_2	q_3	r_3	$c_3 = c_2q_3 + c_1$
r_2 / r_3	q_4	r_4	$c_4 = c_3q_4 + c_2$
…	…	…	…
r_{n-3} / r_{n-2}	q_{n-1}	r_{n-1}	$c_{n-1} = c_{n-2}q_{n-1} + c_{n-3}$
r_{n-2} / r_{n-1}	q_n	r_n	$c_n = c_{n-1}q_n + c_{n-2}$

秦九韶明确指出，当 $r_n = 1$，且 n 是偶数时，最后所得到的 c_n 就是所求的乘率 k_i。如果 $r_n = 1$ 且 n 是奇数时，把 r_{n-1} 和 r_n 相除，形式上令 $q_{n-1} = r_{n-1} - 1$，那么余数 r_{n+1} 仍旧是 1，再作 $c_{n+1} = q_{n+1}c_n + c_{n-1}$，这时 $n+1$ 则是偶数，c_{n+1} 就是所求的乘率 k_i。不论哪种情形，最后一步都会出现余数 1(剩一)，这时整个计算程序终止(右上余一而止)。

第三步，求用数 s_i 并运用“孙子定理”求 N，即泛用数 $s_i = k_iM_i$，于是 $N = \sum_{i=1}^{n} R_i s_i - PM$（$P$ 为非负整数）。

秦九韶在《数书九章》中以“古历会积”、“积尺寻源”、“推计土功”、“程行计地”等算例给出大衍总数术的许多实际应用，以解决历法、工程、赋役和军旅等实际问题。由于实际问题中的模数 A_i 往往并不两两互素，或为小数和分数情形，所以秦九韶按照了“元数格”(A_i 是整数)、“收数格”(A_i 是小数)、“通数格”(A_i 是分数)等情形，分别进行化归处理，把“收数”和“通数”都化成“元数格”情形来计算。秦九韶的大衍术是中世纪世界数学史上最优秀的数学成果之一，充分体现了中国数学的构造性和算法化的特点。

随宋元数学著作在明代的失传，“大衍术”在中国本土也完全失传，明代数学著作中仅《算法统宗》载“物不知总”这样趣味数学问题。直至清代，秦九韶的《数书九章》重新被发现后，“大衍求一术”才又引起中国学者的研究兴趣，张敦仁[1]（1754～1834）、焦循[2]（1763～1820）、李锐[3]（1769～1817）、骆腾凤[4]（1770～1842）、时曰醇[5]（生卒年不详）、黄宗宪[6]（生卒年不详）等清代数学家对“大衍术”进行了解释、改进和简化，其中黄宗宪的《求一术通解》（1874）对模数非两两互素的情形给出了更加简明的方法，但是时间已是晚清，并且有西学的部分影响。关于黄宗宪的方法将在本章第 4 节论述。

中国不定分析算法，除大衍术外，还有一次不定方程求解问题，由于最初出现于南北朝数学著作《张丘建算经》，是“百钱买百鸡”问题，常常被称作“百鸡术”或“百鸡问题”。不过，历史上这样的算题并不多。大衍求一术所处理的数学对象既可以用同余式表达，也可用一次不定方程表示，但在中国，对于百鸡问题的求解似乎一直没有采用大衍求一术。

在公元 6 世纪到 12 世纪的印度数学中，求解一次同余式和一次不定方程的算法也十分发达，印度人称其方法为“库塔卡”（Kuṭṭaka），它最早出现于阿耶波多（Āryabhaṭa，476～550）的著作 Āryabhaṭīya（499）中，该书“数学章”中，有求解

$$N = ax + R_1 = by + R_2 \quad (0 \leqslant R_1 < a,\ 0 \leqslant R_2 < b) \tag{6.5}$$

这一类型的同余式问题。当 $R_1 > R_2$ 时，令 $R_1 - R_2 = c$，阿耶波多将上述同余式（6.5）还原成一次不定方程

$$y = \frac{ax + c}{b} \tag{6.6}$$

解出 y 和 x 后，代入式（6.5）以求出自然数 N。书中第一次把这类问题称作“Kuṭṭaka”。对于方程（6.5），若 $R_1 - R_2 = c$，则可转化为方程（6.6），所以两

---

〔1〕 1831 年张敦仁著《求一算术》（三卷）。
〔2〕 1831 年焦循著《大衍求一术》。
〔3〕 李锐《日法朔余强弱考》一书，在书中他提出的“有日法求强弱”术，沟通了一次同余式组和二元一次不定方程的关系，为骆腾凤、时曰醇等人以求一术解百鸡问题的先声。
〔4〕 1815 年骆腾凤著《艺术录》，其中有关于“大衍求一法”的讨论。
〔5〕 1873 年时曰醇著《求一术指》。
〔6〕 1874 年黄宗宪著《求一术通解》。

者是等价的。印度人所给的方法对于方程(6.5)与方程(6.6)本质是同一的。印度历史上不少数学书只给出其中一种类型方程的解法,婆什伽罗二世(Bhaskara II, 1114~1193)在其著名的 Līlāvatī 中是以方程(6.6)为对象的。梵语 Kuṭṭaka 这个词是由动词 kuṭṭ(细分、粉碎的意思)转化而来的,指在解的过程中起实质作用的辗转相除法(a 与 b 辗转相除,即相互被粉碎,亦即相互被分割变小)。

为解式(6.6),对 a 与 b 实施辗转相除法,把各次商以及 c,0 排列如下:q_1, q_2, …, q_{m-1}, q_m, c, 0,将这一列数叫"蔓"(vallī),对此"蔓"反复实施给定演算步骤:以自下数第二个乘其上,加最后者之结果,改写自最后数第三个,最后者从算板上消失,即 $\beta_k = q_{m-k+1}\beta_{k-1} + \beta_{k-2}$(其中 $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = c$)。例如,第一次演算的结果得到的"蔓"是 q_1, q_2, …, q_{2n-1}, $q_{2n}c$, c;第二次演算的结果得到的"蔓"是 q_1, q_2, …, $q_{2n-1}q_{2n}c + c$, $q_{2n}c$;最后只剩下最前面的两个位置(含有 q_1 和 q_2)上的数字 β,α,则 $(\beta, \alpha) = (y, x)$ 是式(6.6)的一组解。以上算法程序要求由辗转相除法而生成的商的个数为偶数,即 $m = 2n$(秦九韶的"大衍求一术"求"乘率"时要求"右上余一"而止)。秦九韶的"大衍求一术"归算 α,β 是从上述"蔓"的 q_1,q_2 开始往后迭代演算的,顺序与印度人的做法刚好相反,从第一次商 q_1 开始,随得随乘,往下递互累乘,十分自然。从算法角度上考虑,秦九韶算法程序比印度算法程序要好,因为在数据存储上比较经济。

印度 Kuṭṭaka 问题出现的时间比《孙子算经》要晚,现在还不能断言它一定受到了《孙子算经》的影响,也不能轻言秦九韶的"大衍求一术"来源于印度的 Kuṭṭaka。笔者主张它们自有各自的本土算法源流。

6.2 演纪术及其与求一术的关系[1]

对于秦九韶"大衍求一术"的源流问题,很久以来,一直为学界所关注。20 世纪 60 年代李俨(1892~1963)、杜石然[2]、钱宝琮[3](1892~1974)认

[1] 本节内容是与王荣彬先生合作撰写的,曾发表于《自然科学史研究》,1998,17(1):47-54.
[2] 李俨、杜石然.中国古代数学简史[M].北京:中华书局,1964.
[3] 钱宝琮.求一术源流考[A].中国科学院自然科学史研究所编.钱宝琮科学史论文选集[C].北京:科学出版社,1983:23.

为，求一术的产生与古代历算中的上元积年推算有关。此后，这方面著述不绝，李文林、袁向东[1]就汉历中的上元积年推算，讨论了中国古代同余算法问题。沈康身[2]（1923～2009）讨论了这一算法与古老的更相减损术的渊源关系。20世纪80年代李继闵[3][4]（1938～1993）又考释了汉历中的"通其率"算法，通过算理分析，推测"求一术"由"通其率术"发展而来，前者是后者存在的佐证，并且认为"调日法"是"通其率术"的衍生物，从而解明了古代分数算法与不定分析算法的关系。上述研究基本廓清了从"更相减损术"到"通其率术"，以至发展为"求一术"的历史线索。

对于自然数 $a, b\ (a>b)$，用辗转相除法得到一系列商 $\{q_1, q_2, q_3, \cdots, q_n\}$，以及相应的余数系列：$\{r_1, r_2, r_3, \cdots, r_n\}$（其中 $r_n = 0$），则得到等数 $(a, b) = d = r_{n-1}$。

若依法则

$$\begin{cases} c_1 = q_1 \\ e_1 = 1 \end{cases}, \begin{cases} c_2 = q_1 q_2 + 1 \\ e_2 = q_2 \end{cases}, \cdots, \begin{cases} c_i = c_{i-1} q_i + c_{i-2} \\ e_i = e_{i-1} q_i + e_{i-2} \end{cases} (i>2) \qquad (6.7)$$

计算，则得到 $\dfrac{a}{b}$ 的渐近分数序列 $\left\{\dfrac{c_1}{e_1}, \dfrac{c_2}{e_2}, \cdots, \dfrac{c_n}{e_n}\right\}$。这里 $\dfrac{c_n}{e_n} = \dfrac{a/d}{b/d}$，此即所谓的"通其率"算法[5]。

当 $n = 2m$，且 $r_{2m} = 1$ 时，取 $k = C_{2m}$，则有 $kb = 1(\mathrm{mod}\, a)$，便为求一术。

李继闵[6]在上述推测的基础上，又进一步指出，在演算程序方面，"通其率术"发展到"求一术"有以下几点细节发生了变化：

---

〔1〕 李文林，袁向东. 沦汉历上元积年的计算[A]. 科技史文集[C]（第三辑）. 上海：上海科技出版社，1980.

〔2〕 沈康身. 更相减损术源流[J]. 自然科学史研究，1982. 1(3)：193.

〔3〕 李继闵. "通其率"考释[A]. 吴文俊主编. 中国数学史论文集[C]（第一集）. 济南：山东教育出版社，1985：24.

〔4〕 李继闵. 中算家分数近似法探究[A]. 吴文俊主编. 中国数学史论文集[C]（第三集）. 济南：山东教育出版社，1987：28.

〔5〕 在《三统历》中，计算五星运动周期时，曾有"通其率"的记述。"'通其率'考释"一文认为，由于从五星每会合周期各段行度到该周期内的总平均行度，必须要有"通分相约"的运算，这"约分"运算，不应是"等除法实"的约分术，而是"其率换算"之"通其率术"。中国古算史上是否实有"通其率术"之名，有待考证，《三统历》中"通其率"含义也可能有不同解释。本文借李继闵文章"'通其率'考释"之说，以称谓由辗转相除归算渐近分数序列及既约分数这一算法。

〔6〕 李继闵. "大衍求一术"溯源[A]. 吴文俊主编. 秦九韶与《数书九章》[C]. 北京：北京师范大学出版社，1987：138.

① 要求 $(a, b) = 1$；

② 略去 $e_i(i = 1, 2, 3, \cdots, n)$ 的计算；

③ 计算 c_i，从 $c_0 = 1$（立天元一）开始；

④ 要求 $r_{2m} = 1$（须右上奇一而止）。

从理论上看，这种推测与分析十分合理且较自然，但是否符合历史的真实情况？“通其率”向求一术演变，实际演算程序又是如何变迁？中算史上是否存在反映这两种算法互为一体的确凿算例？然而，以往的各种研究均未能给出足以证明的史料或具体算例，未臻完美。如果找到这方面算例，上述推测则得到彻底证实，并且也清楚了古代分数算法与不定分析算法的实际演算状况。秦九韶演纪上元积年问题正含有这方面的算例！

6.2.1 秦九韶的“演纪术”

《数书九章》“治历演纪”题如下：

> 问开禧历，积年七百八十四万八千一百八十三，欲知推演之原、调日法、求朔余、朔率、斗分、岁率、岁闰、入元岁、入闰、朔定骨、闰泛骨、闰缩、纪率、气元率、元闰、元数及气等率、因率、蔀率、朔等数、因数、蔀数、朔积年二十三事，各几何？[1]

所谓“二十三事”，就是用演纪术推算上元积年的一系列中间过程。由于中算家没有建立现代的符号体系，故必须给它们分别命名，并计算出相应的数值。

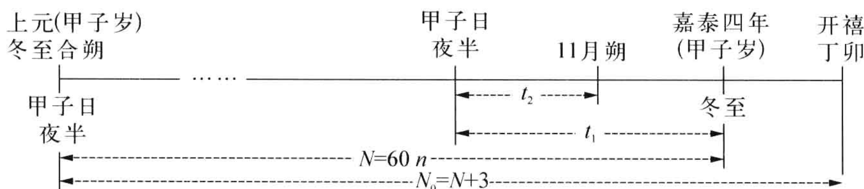


图 6.1 “治历演纪”立术原理示意图

设回归年为$\dfrac{T}{A}$日，朔望月为$\dfrac{B}{A}$日，日法 A。

---

〔1〕 秦九韶. 数书九章（卷三）· 天时类[A]. 郭书春主编. 中国科学技术典籍通汇 · 数学卷[Z]（一）. 郑州：河南教育出版社，1993.

据开禧历实测，$t_1 = 11.6154$ 日，$t_2 = 1.755562$ 日(见图6.1)。所以

气泛骨 $r'_1 = At_1 = 16900 \times 11.446154 = 193440.0026$，

气定骨 $r_1 = [r'_1] = [At_1] = 193440$，

朔泛骨 $r'_2 = At_2 = 16900 \times 1.755562 = 29668.9978$，

朔定骨 $r_2 = [r'_2] + 1 = 29669$，

闰泛骨 $W = r_1 - r_2 = 163771$。

那么，所求上元积年 $N = 60n$ 应满足：

$$\begin{cases} TN \equiv r_1 (\bmod 60A) & (1) \\ TN \equiv W (\bmod B) & (2) \end{cases}$$

秦九韶求解过程见表6.1。

表6.1　秦九韶用"演纪术"推算上元积年过程

术　文	解　释
①〔1〕以历法求之、大衍入之、调日法如何承天术。用强弱母子互乘，得数并之为朔余，以二十九日通日法，增入朔余，为朔率。又以日法乘前历所测冬至气刻分，收弃末位为偶数，得斗分。	① 取 $\frac{9}{17} < \frac{Y}{A} < \frac{26}{49}$，用调日法得 日法 $A = 49x + 17y = 49 \times 339 + 17 \times 17 = 16900$ 朔余 $Y = 26x + 9y = 26 \times 339 + 9 \times 17 = 8967$ 朔率 $B = 29A + Y = 499067$ 实测回归年 $T/A = 365 + R/A = 365.2431$ 日，故得 斗分 $R = [0.2431A] = 4108$。
② 与日法，用大衍入之，求等数、因数、蔀数。	② 以大衍术求等数 $d = (R, A)$，蔀率 $E(= A/d)$ 或 $F(= R/d)$，乘率(因数)k， 使 $kF \equiv 1 (\bmod E)$，从而求解同余式(1)。
③ 以纪法乘等数为约率，置所求气定骨，如约率而一，得数以乘因率，满蔀率去之，不满以纪法乘之，为入元岁。	③ 对于同余式(1)，可化为 $nF \equiv r''_1 (\bmod E)$， 其中：$r''_1 = \frac{r_1}{e}$，约率 $e = 60d$ $\left.\begin{array}{l}(r''_1, E) = 1 \\ kF \equiv 1 (\bmod E)\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} kr''_1 F \equiv r''_1 (\bmod E) \\ nF \equiv r''_1 (\bmod E)\end{array}\right\}$ $\Rightarrow \left.\begin{array}{l}(n - kr''_1)F \equiv 0 (\bmod E) \\ (E, F) = 1\end{array}\right\}$ $\Rightarrow (n - kr''_1) \equiv 0 (\bmod E)$ $\Rightarrow (n \equiv kr''_1) \equiv z (\bmod E) \quad (z < E)$ $\Rightarrow n = pE + z \Rightarrow 60n = 60pE + 60z$ 即 $N = pL + M$　(3) 故先求入元岁 $M = 60z$

〔1〕 序号①至⑥为笔者所加。

（续　表）

术　　文	解　　释
④ 次置岁日，以日法通之。并以定斗分为岁率，以十二月乘朔率。减岁率，余为岁闰。	④ 岁率 $T = 365A + R$，岁闰 $P = T - 12B$
⑤ 以岁闰乘入元岁，满朔率去之，不满为入闰，与闰骨相减之，得差[或适足，便以入元岁为积年，后术并不用，或差在刻分法半数以下者，亦以入元岁为积年]。〔1〕必在刻分法半数以上，却以闰泛骨并朔率，得数内减入闰，余与朔率求闰缩，[在朔余以下，使为闰缩，以上，用朔率减之亦得]。以纪法乘日法为纪率，以等数约之，为气元率，以气元率乘岁闰，满朔率去之，不满为元闰。	⑤ 利用式(3)对同余式(2)求解： $TN \equiv W \pmod B \Leftrightarrow (P+12B)N \equiv W \pmod B$ $\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} PN \equiv W \pmod B \\ N = pL + M \end{array}\right\} \Rightarrow (pPL + PM) \equiv W \pmod B$ 分别求解：$PM \equiv Q \pmod B$ 与 $PL \equiv H \pmod B$，其中：入闰 $Q < B$；元闰 $H < B$ 于是， $pPL + PM \equiv W \pmod B$ $\Rightarrow pH + Q \equiv W \pmod B$ $\Rightarrow pH \equiv (W - Q) \pmod B$ 当 $W < Q$ 时，闰缩 $S = W - Q + B < B$，则 $pH \equiv (W - Q) \pmod B \Leftrightarrow pH \equiv S \pmod B$　(4)
⑥ 虚置一亿，减入元岁，余为实，元率除之，得乘限。乃以元闰与朔率，用大衍术入之，求得等数、因数、蕃数。以等数约闰缩，得数以因数乘之，满蕃率去之，不满，在乘限以下，以乘元率，为朔积年，并入元岁，为演纪积年，又加成历年〔2〕。	⑥ 要求上元积年 $N < 10^8$，由于 $N = pL + M$，故有 $p < \dfrac{10^8 - M}{L} = h$（乘限） 对式(4)求解，首先用大衍术求 等数 $m = (H, B)$ 蕃数 $C(= B/m)$ 或 $D(= H/m)$， 因数 g，使 $gD \equiv 1 \pmod C$ $pH \equiv S \pmod B \Rightarrow pD \equiv \dfrac{S}{m} \pmod C$ $\Rightarrow \left.\begin{array}{l} p(gD) \equiv g\dfrac{S}{m} \pmod C \\ gD \equiv 1 \pmod C \end{array}\right\} \Rightarrow p \equiv g\dfrac{S}{m} \pmod C$ 朔积年 $V = pL$ 演纪积年 $N = V + M$，历年 $N_0 = N + 3$

6.2.2　大衍术算例分析

在秦九韶演算中，两处使用了大衍术，即术文中的②，⑥处。

术文②以大衍术求 $d = (R, A)$，$E = \dfrac{A}{d}$ 及乘率 k，使 $kF \equiv 1 \pmod E$，秦九韶并没有采用"大衍总数术"（即剩余定理）中的做法，先求等数 d，再"等

〔1〕方括号内的文字为秦九韶原注，下同。

〔2〕秦九韶. 数书九章(卷三)·天时类[A]. 郭书春主编. 中国科学技术典籍通汇·数学卷[Z]（一）. 郑州：河南教育出版社，1993：468－469.

除法实”求蕃数 E, F，最后以 E, F 入算，用大衍求一术归出 k，而是直接以 R, A 入算，在辗转相除求出 d 的同时，归算出 E 与 k，其演算图草如下：

$$\begin{pmatrix}1 & R\\ 0 & A\end{pmatrix}=\underset{4}{\begin{pmatrix}1 & 4\,108\\ 0 & 16\,900\end{pmatrix}}\to\underset{4}{\begin{pmatrix}1 & 4\,108\\ 0 & 468\end{pmatrix}}\to\overset{8}{\begin{pmatrix}1 & 4\,108\\ 4 & 468\end{pmatrix}}\to\overset{8}{\begin{pmatrix}1 & 364\\ 4 & 468\end{pmatrix}}\to\underset{1}{\begin{pmatrix}33 & 364\\ 4 & 468\end{pmatrix}}\to$$

$$\underset{1}{\begin{pmatrix}33 & 364\\ 4 & 104\end{pmatrix}}\to\overset{3}{\begin{pmatrix}33 & 364\\ 37 & 104\end{pmatrix}}\to\overset{3}{\begin{pmatrix}33 & 52\\ 37 & 104\end{pmatrix}}\to\underset{1}{\begin{pmatrix}144 & 52\\ 37 & 104\end{pmatrix}}\to\underset{1}{\begin{pmatrix}144 & 52\\ 37 & 52\end{pmatrix}}\to$$

$$\begin{pmatrix}144 & 52\\ 181 & 52\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}144 & 52\\ 325 & 52^{*}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k & d\\ E & 0\end{pmatrix}$$ [1]

术文⑥中，求 $m=(H, B)$，$C=B/m$ 及乘率 g，使 $gD\equiv 1(\bmod C)$，由于 $m=1$，可以直接用大衍求一术求出 g，从而求解同余式 $gH\equiv 1(\bmod B)$，再求解 $pH\equiv S(\bmod B)$。然而秦氏仍然用大衍术求等数 $m=1$，蕃数 $C=499\,067$ 及乘率 $g=457\,999$，其演草如下：

$$\begin{pmatrix}1 & H\\ 0 & B\end{pmatrix}\to\underset{1}{\begin{pmatrix}1 & 377\,873\\ 0 & 499\,067\end{pmatrix}}\to\underset{1}{\begin{pmatrix}1 & 377\,873\\ 0 & 121\,194\end{pmatrix}}\to\overset{3}{\begin{pmatrix}1 & 377\,873\\ 1 & 121\,194\end{pmatrix}}\to\overset{3}{\begin{pmatrix}1 & 14\,291\\ 1 & 121\,194\end{pmatrix}}\to$$

$$\underset{8}{\begin{pmatrix}4 & 14\,291\\ 1 & 121\,194\end{pmatrix}}\to\underset{8}{\begin{pmatrix}4 & 14\,291\\ 1 & 6\,866\end{pmatrix}}\to\overset{2}{\begin{pmatrix}4 & 14\,291\\ 33 & 6\,866\end{pmatrix}}\to\overset{2}{\begin{pmatrix}4 & 559\\ 33 & 6\,866\end{pmatrix}}\to\underset{12}{\begin{pmatrix}70 & 559\\ 33 & 6\,866\end{pmatrix}}\to$$

$$\underset{12}{\begin{pmatrix}70 & 559\\ 33 & 158\end{pmatrix}}\to\overset{3}{\begin{pmatrix}70 & 559\\ 873 & 158\end{pmatrix}}\to\overset{3}{\begin{pmatrix}70 & 85\\ 873 & 158\end{pmatrix}}\to\underset{1}{\begin{pmatrix}2\,689 & 85\\ 875 & 158\end{pmatrix}}\to\underset{1}{\begin{pmatrix}2\,689 & 85\\ 873 & 73\end{pmatrix}}\to$$

---

〔1〕 * 号处的 52 似为 0 之误。

$$\begin{pmatrix}2\,689 & \overset{1}{85}\\ 3\,562 & 73\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2\,689 & \overset{1}{12}\\ 3\,562 & 73\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}6\,251 & 12\\ 3\,562 & \underset{6}{73}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}6\,251 & 12\\ 3\,562 & \underset{6}{1}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}6\,251 & \overset{11}{12}\\ 4\,108 & 1\end{pmatrix}\to$$

$$\begin{pmatrix}6\,251 & \overset{11}{1}\\ 4\,108 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}457\,999 & 1\\ 4\,108 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}457\,999 & 1\\ 499\,067 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}g & m\\ C & 0\end{pmatrix}$$

随后求解 $pH\equiv S(\bmod B)$ 时，化为 $pD\equiv\dfrac{S}{m}(\bmod C)$，而利用 $gD\equiv 1(\bmod C)$，以求解 $p\equiv g\dfrac{S}{m}(\bmod C)$。显然，秦九韶给出的是 H,B 未必互素的一般性演算程序，与②情形完全一致。

事实上，对于 $(R,A)=d$，$kR\equiv d(\bmod A)\Leftrightarrow kF\equiv 1(\bmod E)$，因此，不论 R,A 是否互素，均可以辗转相除法求出乘率 k，使 $kR\equiv d(\bmod A)$ 且 $kF\equiv 1(\bmod E)$。

中算家在求等数的过程中，发现了这一规律，最初并不考虑 a,b 是否互素，直接用 a,b 演之于辗转相除法，当 $(a,b)\neq 1$ 时，程序到余数 $r_{2m-1}=r_{2m-2}=d$（或 $r_{2m}=0$）时结束。$(a,b)=1$ 时，乃其特殊情形 $d=1$。秦九韶将此程序笼统称为“大衍术”。后来，由于同余式组求解的需要，在大衍总数术中，将其规范为特殊情形，形成大衍求一术的演算模式，成为其“大衍类”问题求解的主要工具。

特别值得注意的是，在秦九韶上述大衍术演算中，求出乘率 k 的同时，既得到等数 d，又归演出蔀数 E（同样也可归出 F，因这里无需求 F，故略之），于是直接得到 $\dfrac{a}{b}$ 的既约分数 $\dfrac{F}{E}$，无需“等除法实”。这正是“通其率”！它表明古代更相减损求等数、大衍求一术与“通其率”算法原本是一体的，这为李继闵的“‘大衍求一术’溯源”一文[1]的推测提供了确凿证据，所谓“通其率”算法在中国古代是存在的。不仅如此，正如秦九韶所指出的那样，历家相传所用的“方程术”亦与大衍术本质

〔1〕 李继闵．“大衍求一术”溯源[A]．见：吴文俊主编．秦九韶与《数书九章》[C]．北京：北京师范大学出版社，1987：138．

相同。

6.2.3 “方程术”与“大衍求一术”

在上述术文之下，秦九韶又记述道：

> 今人相乘演积年，其术如调日法，求朔余、朔率，立斗分、岁余，求气骨、朔骨、闰骨，及衍等数、约率、因率、蔀率，求入元岁、岁闰、入闰、元率、元闰，已上皆同此术，但其所以求朔积年之术，乃以闰骨减入闰，余谓之闰赢，却与闰缩、(元闰)、朔率，列号甲乙丙丁四位，除乘消减，谓之方程，乃求得元数，以乘元率，所得谓之朔积年。所谓方程，正是大衍术[今人少知]，非特置算系名，初无定法可传，甚是惑误后学，易失古人之术意，……[1]

就是说，在求解 $pH \equiv S(\mathrm{mod}\, B)$ 时，当时的历算家使用的是一种所谓“方程术”的演算程序以求元数 p。关于这种演算程序，秦氏记录寥寥数语，且似有脱文，故不详其真。根据古代线性方程组求解的“方程术”程序，结合本问题求解的前提，我们认为秦氏所谓的“方程术”程序可能如下：

$$\begin{pmatrix} B & H \\ 0 & S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 499\,067 & 377\,873 \\ 0 & S \end{pmatrix} \xrightarrow{\times(-1)} \begin{pmatrix} 121\,194 & 377\,873 \\ -S & S \end{pmatrix} \xrightarrow{\times(-3)}$$

$$\begin{pmatrix} 121\,194 & 14\,291 \\ -S & 4S \end{pmatrix} \xrightarrow{\times(-8)} \begin{pmatrix} 6\,866 & 14\,291 \\ -33S & 4S \end{pmatrix} \xrightarrow{\times(-2)} \begin{pmatrix} 6\,866 & 559 \\ -33S & 70S \end{pmatrix} \xrightarrow{\times(-12)}$$

$$\begin{pmatrix} 158 & 559 \\ -873S & 70S \end{pmatrix} \xrightarrow{\times(-3)} \begin{pmatrix} 158 & 85 \\ -873S & 2\,689S \end{pmatrix} \xrightarrow{\times(-1)} \begin{pmatrix} 73 & 85 \\ -3\,562S & 2\,689S \end{pmatrix} \xrightarrow{\times(-1)}$$

$$\begin{pmatrix} 73 & 12 \\ -3\,563S & 6\,251S \end{pmatrix} \xrightarrow{\times(-6)} \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ -41\,068S & 6\,251S \end{pmatrix} \xrightarrow{\times(-11)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -41\,068S & 457\,999S \end{pmatrix} \xrightarrow{\times(-1)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -499\,067S & 457\,999S \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & m \\ CS & gS \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ C & g\dfrac{S}{m} \end{pmatrix} \xrightarrow{\times(-173\,060)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ C & p \end{pmatrix}$$

---

〔1〕秦九韶．数书九章(卷三)・天时类[A]．郭书春主编．中国科学技术典籍通汇・数学卷[Z](一)．郑州：河南教育出版社，1993：468－469.

这种“方程术”与大衍术相比，本质一致，只不过前者用遍乘相减，后者代之以除法取余，所以秦氏认为此“正是大衍术”，这一改变“非惟止用乘除省便，又且于自然中取见积年”。

通过秦九韶这段记载，反映大衍术由来已久。在秦九韶时代，历家相传的演纪上元算法，从步骤①至⑤已由秦氏记录下来，但步骤⑥则是秦氏依据算理规范化后的形式，它完全同步骤②，历家此处所用的“方程术”因“初无定法可传，甚是惑误后学”，而被秦九韶改进。但从算理上来看，“方程术”应是同大衍术本质一致的一种形式，秦九韶点破了这一层“窗户纸”。

综合上述分析，有如下几点结论：

(1) 在中算史上，确实存在着归算辗转相除所得之一系列商率而得到渐近分数序列及其既约分数的算法。古代治历者相传使用这种算法，与更相减损、大衍术融为一体，很可能没有专名，所谓“用而不知”是也。虽然还不能肯定《三统历》中的“通共率”一语即指这一算法，但在中算史研究中称此算法为“通其率术”是恰当的。

(2) 历家相传的解一次同余式方法，秦九韶称其为大衍术，是一种并不要求入算的两数互素的一般性演算程序，大衍求一术是秦九韶对大衍术规范化的结果。

(3) 历家推算历元的“方程术”与大衍术在算理本质上应是一致的，秦九韶将其改进，使演纪术的步骤⑥与步骤②完全相同。

上元积年的推算是古代历法中的一个重要课题，但直到元代《授时历》废止积年日法，现存史料中论及此算法者，仅见于秦九韶《数书九章》。《数书九章》记述上元积年算法有二：其一见于大衍类第二问“古历会元”，用大衍总数术；其二见于天时类第三问“治历演纪”，用演纪术。以往的研究已证明，古历会积实系秦氏为阐发大衍总数术之理的杜撰之作，大衍总数术对于推求上元的实际应用，是华而不实的〔1〕。对汉代历元推算方法的研究则表明，早期历元推算仅归结为解一个单一的一次同余式问题〔2〕〔3〕，因而只需

〔1〕 李继闵. 秦九韶关于上元积年的论述[A]. 秦九韶《数书九章》成书 740 周年纪念国际学术会议论文[C]. 北京：科学出版社，1987.

〔2〕 李文林、袁向东，沦汉历上元积年的计算[A]. 科技史文集[C](第三辑). 上海：上海科技出版社，1980.

〔3〕 李继闵. “大衍求一术”溯源[A]. 吴文俊主编. 秦九韶与《数书九章》[C]. 北京：北京师范大学出版社，1987：138.

用大衍术。隋唐以后演纪上元的实际算法，据秦九韶的记述，大抵就是本文所指的步骤①至⑤及所谓的“方程术”。秦九韶还指出：

> 独大衍法不载九章，未有能推之者，历家演法颇用之，以为方程者误也。
>
> 又云：圣有大衍，微寓于易。奇余取策，群数皆捐，衍而究之，探隐知原。数术之传，以实为体，其书九章，惟兹弗纪。历家虽用，用而不知[1]。

这里所言之“大衍”，专指大衍术，非大衍总数术。此处的“九章”则泛指算术。

可见，大衍类算法的发生发展经历了：“更相减损术（先秦）”→“一次同余问题解法（汉代）”→“演纪上元法（隋唐以后）”→“秦九韶集大成而分类定名”这一发展路线。

秦九韶规范大衍术与改进“方程术”在算法机械化上具有十分重要的意义，也正因为如此，他使历家原有的算法更加清晰完善，并有所进步，大衍总数术或许就是秦九韶在历家历元推算启发下总结完成的。剩余定理源于历家的上元推算，但不是历家推算上元实际所用的算法。

6.3　关孝和的诸约术、剩一术与剪管术

根据现存史料考察，包括《孙子算经》在内的“算经十书”虽在唐代传入日本，但至晚在15，16世纪时，在日本似乎已经失传，也没有证据表明《数书九章》传入日本，所以和算家关于同余式组求解的知识，不可能源自《孙子算经》和《数书九章》。明代程大位的《算法统宗》(1592)出版后不久便在日本广为传播，对和算产生重要影响，该书中载有“物不知总”问题。另外，朝鲜人复刻的《杨辉算法》也曾在日本传播，关孝和曾抄录过此书，该书包括《续古摘奇算法》，其中包含“剪管术”，不过杨辉“剪管术”的内容与方法不及秦氏“大衍总数术”，不具一般性，算题也都比较简单。在和算书籍中，剪管术最初出现于关孝和的著述中，他所研究的剪管术问题可能来源于杨辉的《续古摘奇算法》，在其基础上他进行了一般化的改造。

---

〔1〕 秦九韶. 数书九章序[A]. 郭书春主编. 中国科学技术典籍通汇·数学卷(一)[Z]. 郑州：河南教育出版社，1993：439.

户板保佑(Toita Yasusuke，1708～1784)在"关流四传书"的《关算前传》(五)中，对自己学习研究剪管术过程有过这样一段描述：

夫剪管法，予自幼用工夫而得其术矣，于中西流算术传书著之，《尘劫记》谓之百五减，《孙子》书始出之，《算法统宗》载之，《括要算法》术之，于是，予撰《百五减考》与《剪管考》两书，所以传之，中西流而号之旧术也。自是历二十余年在京师之日再校其术，以方程而作新术，即剪管别术也。欲以订之先生，故此一卷，术非旧术，仍所以号之新术也[1]。

说明在关孝和之前，和算家所接受的剪管术知识来自《算法统宗》、《孙子算经》(关孝和未必读过《孙子算经》)，而"剪管"这一名称却是来源于《杨辉算法》的。关孝和的剪管术是对《杨辉算法》中相关问题的推广。

关孝和关于同余式组的解法主要收录于《括要算法》亨卷，包括"诸约"、"剩一"、"剪管"三部分内容，实际上是解一次同余式组算法的三个组成部分。另有稿本《拾遗诸约之法·剪管术解》(1683)传世，其内容与之基本一致，当是关流和算家抄写本。

6.3.1 诸约术

《括要算法》亨卷中的"诸约"，包括互约、逐约、齐约、遍约、增约、损约、零约、遍通。后来的和算家在此基础上又加入自约(即整数的素因数分解)。诸约术之中的增约术与损约术，是无穷递缩等比级数的求和公式，零约术是丢番图逼近算法(见本书第7章相关内容)，遍通是通分算法，它们都与同余式组算法无关。互约、逐约、齐约、遍约四术均为解同余式组算法中的基本步骤。现分别叙之如下：

1) 互约

对于求解同余式组 $N \equiv R_i \pmod{A_i}$，必须把模数 A_i 化成两两互素的 a_i 形式($(a_i, a_j) = 1$)，且 a_i 是 A_i 的约数($a_i \mid A_i$)，还要求最小公倍数不变($[a_1, a_2, \cdots, a_n] = [A_1, A_2, \cdots, A_n]$)。秦九韶在"大衍总数术"中设计了化问数 A_i 为定数 a_i 的基本演算程序，来处理这种问题，其基本算法是"两两连环求等，约奇弗约偶"，"或约得五，而彼有十，乃约偶弗约奇"，即求出两个问数的最大公约数 $d = (A_i, A_j)$，去约其中的一个，而不约另一个。对于两

[1] 学士院.明治前日本数学史.第三卷[M].東京：岩波書店，1957：285.

个数的情形，就是关孝和的“互约术”，即对于 A_1，A_2，求满足 $[A_1, A_2] = [a_1, a_2]$，$(a_1, a_2) = 1$，$a_i \mid A_i$，三个条件的 a_1，a_2。

《括要算法》没有叙述一般法则，只给出算例。《大成算经》叙之法则为：

> 互约者，二数相约也。先两数互减得等数，以约一数[或约之依其先后，虽有约数异者，于相乘数无参差，然其数大略以无过、不及者为专也。逐约也仿此]，得数与未约者又互减，得等数，以之约未约者，乘先约者[乃其先约者每得等数逐相乘，后约者逐除之也]，其两数复如前得等数，以之约后约者，乘次乘者，逐如此而得等数一，则止之，为约数带分者，以两分子先如此相约而后，又以两分母互减得等数，为约法，以之约一件约数[或前或后，两数所约不定，而虽依数各有斟酌，大率以约多数者为准也，逐约者亦同之]，得定数[1]。

兹以《括要算法》(图 6.2)所给两个算例说明“互约术”方法：

第一问：

> 今有六个、八个，问互约之各几何？
>
> 答曰：六为三，八不约。
>
> 术曰：六与八互减，得等数二，以约六，为三[三与八互减，得等数一、乃得等数一，则不约而止，后仿之]。
>
> 又术曰：八与六互减，得等数二，以约八，为四，四与六互减，得等数二，以因四，为八，约六，为三。合问。

该题是对 6,8 这两个数进行互约，即 $A_1 = 6$，$A_2 = 8$。

首先求出公约数 $(6, 8) = 2$，然后以之约 6，得 $6 \div 2 = 3$，于是 $(3, 8) = 1$，两数约后为 3 与 8。

第二种约法是：求出公约数 $(6, 8) = 2$ 后，约另一数 8，即 $8 \div 2 = 4$，所得数与第一个数 6 不互素，即 $(6, 4) = 2$，所以再用这个公约数 $(6, 4) = 2$ 去约 6，并同时去乘 4，保证它们的最小公倍数不变，得 $6 \div 2 = 3$，$4 \times 2 = 8$，则 $(3, 8) = 1$。

6	3
8	8

第一种约法

6	6	3
8	4	8

第二种约法

---

〔1〕 関孝和，建部賢明，建部賢弘編集. 大成算經[M]. 卷六. 写本. 東北大学図書館狩野文庫藏. 登録号：ws006478，索書号：狩野 7.20820.20.

第二问：

今有三十六个、四十八个，问互约之各几何？

答曰：三十六为九，四十八为十六。

术曰：三十六与四十八互减，得等数十二，以约三十六，为三；三与四十八互减，得等数三，以因三，为九，约四十八，为一十六。

又术曰：四十八与三十六互减，得等数十二，以约四十八，为四，四与三十六互减，得等数四，以因四，为一十六，约三十六，为九。合问。

该题给出 $A_1 = 36$, $A_2 = 48$，对它们进行互约。首先求出他们最大公约数 $(36, 48) = 12$，然后以之约第一个数 36，得 $36 \div 12 = 3$，于是 $(3, 48) = 3$。

$3 \times 3 = 9$, $48 \div 3 = 16$

$(36, 48) = 12$, $48 \div 12 = 4$，则 $(36, 4) = 4$

$4 \times 4 = 16$, $36 \div 4 = 9$

36	3	9	36	36	9
48	48	16	48	4	16
第一种约法			第二种约法		

在这两例中，前一术用的是“互约术”最基本方法，即秦九韶所谓的“约

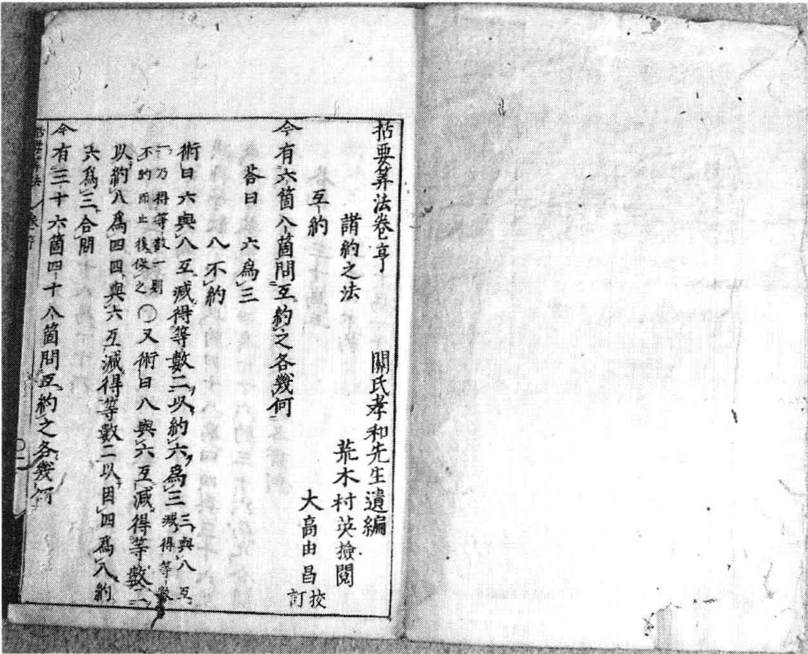

括要算法卷亨
關氏孝和先生遺編
荒木村英撿閲
大高由昌訂校
諸約之法
互約
今有六箇八箇問互約之各幾何
答曰六為三
八不約
術曰六與八互減得等數二以約六為三三與八互減得等數一
乃得等數一則不約而止後倣之○又術曰八與六互減得等數二
以約八為四四與六互減得等數二以因四為八約
六為三合問
今有三十六箇四十八箇問互約之各幾何

图 6.2　关孝和《括要算法》中的诸约术

奇弗约偶"情形，"又术"是特殊情形的互约，即秦九韶所谓的"或约得五，而彼有十，乃约偶弗约奇"以及其"复数格"情形中所谓的"约奇弗约偶，复乘偶；或约偶弗约奇，复乘奇；或彼此可约而犹有类数存者，又相减以求续等，以续等约彼，必复乘此，乃得定数"[1]的情形。

2）逐约术

把两个数之间的互约，推广到两个以上的数之间的互约，便是逐约。这是把同余式组中的模数化成两两互素情形的基本算法，即求 $[A_1, A_2, \cdots, A_n] = [a_1, a_2, \cdots, a_n] = M$，$(a_i, a_j) = 1$，$a_i \mid A_i$ 中的 a_i。《大成算经》叙之法则为：

> 逐约者，诸数重互约也。先以第一数[或起于最末，递至第一者，亦其理相同，齐约、遍约并仿此]，从第二至最末，递依互约术约之，则得第一约数，与从第二末一次数；又以第二一次数，从第三一次数至最末，递依互约术约之，则得第二约数，与从第三末二次数；复以第三二次数，从第四二次数至最末，递依互约术约之，则得第三约数，与从第四末三次数；逐如此，至最末约之遍，得约数。带分者，诸分子相约而后，又诸分母递互减，得一遍之等数，为约法，以之约诸数中最多者一件，得定数[2]。

以《括要算法》所给出的一个算例说明其法则：

> 今有一百零五个、一百一十二个、一百二十六个、一百六十八个、二百零四个，问逐约之各几何？
>
> 答曰：一百零五为五、一百一十二为十六、一百二十六为九、一百六十八为七、二百零四为一十七。
>
> 术曰：一百零五与一百一十二，依互约术，一百零五为一十五，一百一十二不约；一十五与一百二十六，依互约术，一十五为五，一百二十六不约；五与一百六十八，依互约术，皆不约；五与二百零四，依互约术，皆不约；一百一十二与一百二十六，依互约术，一百一十二为一十六，一百二十六为六十三；一十六与一百六十八，依互约术，一十六不约，一百六

---

[1] 秦九韶．数书九章序[A]．郭书春主编．中国科学技术典籍通汇・数学卷(一)[Z]．郑州：河南教育出版社，1993：444.

[2] 関孝和，建部賢明，建部賢弘編集．大成算經[M]．卷六．写本．東北大学図書館狩野文庫藏．登録号：ws006478，索書号：狩野 7.20820.20.

十八为二十一；一十六与二百零四，依互约术，一十六不约，二百零四为五十一；六十三与二十一，依互约术，六十三为九、二十一为七；九与五十一，依互约术，九不约、五十一为一十七；七与一十七，依互约术，皆不约。合问。

该题中，$A_1 = 105$，$A_2 = 112$，$A_3 = 126$，$A_4 = 168$，$A_5 = 204$.

逐约步骤基本就是秦九韶所谓的“两两连环求等，约奇弗约偶”，其逐约过程如下图所示：

第一遍				第二遍			第三遍		第四遍	
204	204	204	204	204	204	204	51	51	17	17
168	168	168	168	168	168	21	21	7	7	7
126	126	126	126	126	63	63	63	9	9	9
112	112	112	112	112	16	16	16	16	16	16
105	15	5	5	5	5	5	5	5	5	5

逐约的结果为：$a_1 = 5$，$a_2 = 16$，$a_3 = 9$，$a_4 = 7$，$a_5 = 17$。

3）齐约术

齐约术为求诸数最小公倍数方法，即求同余式组的模数 A_i 的最小公倍数$[A_1, A_2, \cdots, A_n]=[a_1, a_2, \cdots, a_n]=M$。《大成算经》叙之法则为：

齐约者，约数相乘积也。先第一与第二两数互减，得等数，约一数，以之乘未约者[或先约第一而后乘第二，或先约第二而后乘第一者，皆同，每次准此例]，得数与第三得等数，约一数，以之乘其不约者，递如斯至最末，则约积。带分者，即为通积，又诸分母如前遍得等数，为法，以之约通积，为约积〔1〕。

今以《括要算法》的一个算例，以说明其法：

今有六个、一十四个、一十五个、二十五个，问齐约之几何？

答曰：一千零五十。

术曰：六与一十四互减，得等数二，以约六，得三，三与一十四相乘，得四十二；四十二与一十五互减，得等数三，以约四十二，得一十四，一十四与一十五相乘，得二百一十；二百一十与二十五互减，得等数五，以约二百一十，得四十二，四十二与二十五相乘，得一千零五十，合问。

〔1〕 関孝和，建部賢明，建部賢弘編集. 大成算經[M]. 卷六. 写本. 東北大学図書館狩野文庫藏. 登録号：ws006478，索書号：狩野 7.20820.20.

本题是要对6，14，15，25这四个数进行齐约，即求其最小公倍数[6，14，15，25]，其算法步骤如下：

$$(6, 14)=2,\ 6\div 2=3,\ 3\times 14=42$$
$$(42, 15)=3,\ 42\div 3=14,\ 14\times 15=210$$
$$(210, 25)=5,\ 210\div 5=42,\ 42\times 25=1\,050$$

即得 $[6, 14, 15, 25]=1\,050$。

一般说来，对于求$[A_1, A_2, \cdots, A_n]$，关孝和的齐约术算法程序如下：

$$(A_1, A_2)=d_1,\ A_1\div d_1=a_1,\ a_1A_2=b_1$$
$$(b_1, A_3)=d_2,\ b_1\div d_2=a_2,\ a_2A_3=b_2$$
$$(b_2, A_4)=d_3,\ b_2\div d_3=a_3,\ a_3A_4=b_3$$
$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$
$$(b_{k-1}, A_{k+1})=d_k,\ b_{k-1}\div d_k=a_k,\ a_kA_{k+1}=b_k$$
$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$
$$(b_{n-2}, A_n)=d_{n-1},\ b_{n-2}\div d_{n-1}=a_{n-1},\ a_{n-1}A_n=b_{n-1}$$

则得 $[A_1, A_2, \cdots, A_n]=b_{n-1}$。

4）遍约术

即约去诸数的最大公约数，在同余式组中，可能出现模数存在最大公约数的情形，秦九韶把这类情形规定为“复数格”，约去最大公约数之后，按照“元数格”处理。关孝和的遍约术也是来处理这类问题的。《大成算经》叙之法则为：

> 遍约者，旁约诸数也。先第一与第二两数互减，得等数，以之与第三互减，得次等数，又以之与第四互减，逐至最末，得一般之等数，为约法，各约诸数，得约数。带分者，先以各分母如前遍得等数[或先起于分子者，亦同]，以之又与各分子得等数，为约法，约诸母子，得约数[1]。

兹以《括要算法》所给出的一个算例以说明其法：

---

〔1〕关孝和，建部賢明，建部賢弘編集．大成算經[M]．卷六．写本．東北大学図書館狩野文庫藏．登録号：ws006478，索書号：狩野 7.20820.20.

今有四十八个、七十二个、一百零八个、一百二十八个，问遍约之各几何？

答曰：四十八为一十二、七十二为一十八、一百零八为二十七、一百二十八为三十二。

术曰：四十八与七十二互减，得等数二十四；二十四与一百零八互减，得等数一十二；一十二与一百二十八互减，得等数四，为约数，以遍约之，四十八为一十二、七十二为一十八、一百零八为二十七、一百二十八为三十二。合问。

该题是要求对 48，72，108，128，四个约去最大公约数，术文所述计算过程如下：

$$(48, 72) = 24, (24, 108) = 12, (12, 128) = 4$$

于是，$48 \div 4 = 12$，$72 \div 4 = 18$，$108 \div 4 = 27$，$128 \div 4 = 32$

事实上，若要约将 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的最大公约数约去，首先求它们的最大公约数 $(A_1, A_2, \cdots, A_n) = d$，然后逐一约各数即可。其一般化算法如下：

$(A_1, A_2) = d_1$，$(d_1, A_3) = d_2$，$(d_2, A_4) = d_3$，$(d_3, A_5) = d_4$，$\cdots$，$(d_{n-2}, A_n) = d_{n-1} = d$

则 $(A_1, A_2, \cdots, A_n) = d_{n-1} = d$，于是，计算 $A_i \div d_{n-1} = a_i$，即得各数。

6.3.2　剩一术

关孝和的剩一术与秦九韶的“大衍求一术”算法程序一样，是求解同余式组的关键性算法程序。关孝和之后，和算家把求解 $ax - by = 1$ 的方法叫剩一术或盈一术，把求解 $ax - by = -1$ 的方法叫歉一术或朒一术。《大成算经》中没有“剩一术”这一名称，代之以“累约术”：

累约者，累损益之数也。益数为左，损数为右[带分者，损分母、益分子相乘为左，损分子为右，各先两数互减，得等数，为约法，各约之，而后列于左右也]，以多除少，得初商[左多者，得初商而其余一，则不及求次商，故以一即为剩一之益衰，以初商为损衰；左少者，得次商而余一，则亦以初商即为损衰]；以其余除少，得次商；以次余除初余，得三商；又以三余除次余，得四商；次第如

此，以余左右互相除，以左余一者为末商而止。以末第一商[或起于初商，逐至末商者，亦同]，即为一积；以乘末第二商，加定一，为二积；以之乘末第三商，加一积，为三积；又以之乘末第四商，加二积，为四积；逐以其积乘后商，加前积，为后积，至初商如此，得末积。益数多者，以最末积为损，以次末积为益；损数多者，以最末积为益，以次末积为损；各得剩一之衰。以剩数乘益衰，满损数去之，余[有约法者约之，后皆仿此]得益段；以剩数乘损衰，满益数去之，余得损段。以益数乘益段，得总数[或以损数乘损段，加剩数者，亦同]。言原数而带分者，以损分母乘原数，满损分子去之，余以减损分子，加剩数，而乘益分母，乘[剩一]益衰，得数满益分母、损分子相乘数去之，余得益段。又原数满益分子去之，余以减益分子乘损分母，加剩数，而乘[剩一]损衰，得数满损分母、益分子相乘数去之，余得损段。约益分母，加原数，得总数[1]。

累约术是关于 $ax - by = \delta$ 解法（其中 a 称作益数，b 称作损数），剩一术无疑是其 $\delta = 1$ 的特例，两者算法程序一致。《括要算法》给出两个算例，第一问是 $a > b$ 情形，第二问是 $a < b$ 情形，兹分别叙之如下：

第一问：

今有以左一十九累加之得数，以右二十七累减之，剩一，问左总数几何？

答曰：左总数一百九十。

术曰：以左一十九除右二十七，得商一、不尽八，为甲；

以甲不尽八除左一十九，得商二、不尽三，为乙；

以乙不尽三除甲不尽八，得商二、不尽二，为丙；

以丙不尽二除乙不尽三，得商一、不尽一，为丁[乃余左一而止]。

甲商与乙商相因，加定一，得三，为子；

子与丙商相因，加甲商，得七，为丑；

丑与丁商相因，加子，得一十[是左段数]，以左一十九乘之，得

[1] 関孝和，建部賢明，建部賢弘編集. 大成算經[M]. 卷六. 写本. 東北大学図書館狩野文庫藏. 登録号：ws006478，索書号：狩野 7.20820.20.

左总数一百九十。合问。

该题解 $19x-27y=1$，求 $19x$。

其中 19 为左数(b)，27 为右数(a)，算法程序如下：

右数＝左数×甲商＋甲不尽	$a=bq_0+r_0$
左数＝甲不尽×乙商＋乙不尽	$b=r_0q_1+r_1$
甲不尽＝乙不尽×丙商＋丙不尽	$r_0=r_1q_2+r_2$
乙不尽＝丙不尽×丁商＋丁不尽	$r_1=r_2q_3+r_3$

… … …

一直辗转相除下去，$r_{m-1}=r_mq_{m+1}+r_{m+1}$，直到左边余 1 而止($m$ 为偶数，$r_{m+1}=1$)，然后对一系列的 q_k 进行归算：

子＝甲商×乙商＋1	$q_0q_1+1=c_1$	子
丑＝子×丙商＋甲商	$c_1q_2+q_0=c_2$	丑
寅＝丑×丁商＋子	$c_2q_3+c_1=c_3$	寅
卯＝寅×戊商＋丑	$c_3q_4+c_2=c_4$	卯

… … …

一直计算下去，计算到 $c_{m-1}q_m+c_{m-2}=c_m$，则 c_m 为左段数 x。该题算到丁不尽一($r_3=1$)而停止，得到 $x=c_3=10$，于是得左总数 $19x=190$。

第二问：

今有以左一百七十九累加之得数，以右七十四累减之，剩一，问左总数几何？

答曰：左总数七千六百九十七。

术曰：列左一百七十九，满右七十四去之[若左少右多者，不去。或去之，余左一，则直为左一段也]，余三十一。

以左三十一除右七十四，得商二、不尽一十二，为甲；

以甲不尽一十二除左三十一，得商二、不尽七，为乙；

以乙不尽七除甲不尽一十二，得商一、不尽五，为丙；

以丙不尽五除乙不尽七，得商一、不尽二，为丁；

以丁不尽二除丙不尽五，得商二、不尽一，为戊；

以戊不尽一除丁不尽二，得商一、不尽一，为己[乃余左一而止]。

甲商与乙商相因，加定一，得五，为子；

子与丙商相因，加甲商，得七，为丑；

丑与丁商相因，加子，得一十二，为寅；

寅与戊商相因，加丑，得三十一，为卯。

卯与己商相因，加寅，得四十三[是左段数]，以左一百七十九乘之，得左总数七千六百九十七。合问。

该题求解 $179x - 74y = 1$，求 $179x$。

其中 179 为左数(b)，74 为右数(a)，$a < b$，即“若左少右多者，不去。或去之、余左一则直为左一段也”，所以以 $179 - 74 \times 2 = 31$ 为左数，即解 $31x - 74y = 1$，以 31，74 入算，按第一问的情形进行计算，计算结果为

$$q_0 = 2,\ r_0 = 12$$

$$q_1 = 2,\ r_1 = 7$$

$$q_2 = 1,\ r_2 = 5$$

$$q_3 = 1,\ r_3 = 2$$

$$q_4 = 2,\ r_4 = 1$$

$$q_5 = 1,\ r_5 = 1$$

计算到已不尽 1($r_5 = 1$) 而停止，按 $r_{m-1} = r_m q_{m+1} + r_{m+1}$ 归算出 $c_5 = 43 = x$，则原方程的总左数 $179x = 7\,697$。该题把原方程 $179x - 74y = 1$ 变形为 $31x - 74(y - 2x) = 1$，并且令 $(y - 2x) = y'$，以求解 $31x - 74y' = 1$。

6.3.3　剪管术

求解同余式组的方法称作剪管术，《括要算法》(图 6.3)共给出 9 个例题来说明其解法，这九个问题所反映的同余式组分别如下：

① $x \equiv 1 \pmod 5 \equiv 2 \pmod 7$

② $x \equiv 2 \pmod{36} \equiv 14 \pmod{48}$

③ $x \equiv 2 \pmod 3 \equiv 1 \pmod 5 \equiv 5 \pmod 7$

④ $x \equiv 3 \pmod 6 \equiv 3 \pmod 8 \equiv 5 \pmod{10}$

⑤ $x \equiv 3 \pmod 5 \equiv 2 \pmod 7 \equiv 2 \pmod 9 \equiv 7 \pmod{11}$

⑥ $35x \equiv 35 \pmod{42}$，$44x \equiv 28 \pmod{32}$，$45x \equiv 35 \pmod{50}$

⑦ $8x \equiv 2 \pmod 3$，$7x \equiv 3 \pmod 4$，$6x \equiv 3 \pmod 5$

⑧ $34x \equiv 6 \pmod 8 \equiv 14 \pmod{20} \equiv 23 \pmod{27}$

⑨ $13x \equiv 3 \pmod 7 \equiv 8 \pmod 9$

分别属于三种类型：①～⑤属于 $x \equiv R_i \pmod{A_i}$ 类型；⑥～⑦属于 $b_i x \equiv R_i \pmod{A_i}$ 类型；⑧～⑨属于 $bx \equiv R_i \pmod{A_i}$ 类型。兹每一类型列一例，以说明关孝和的解法。

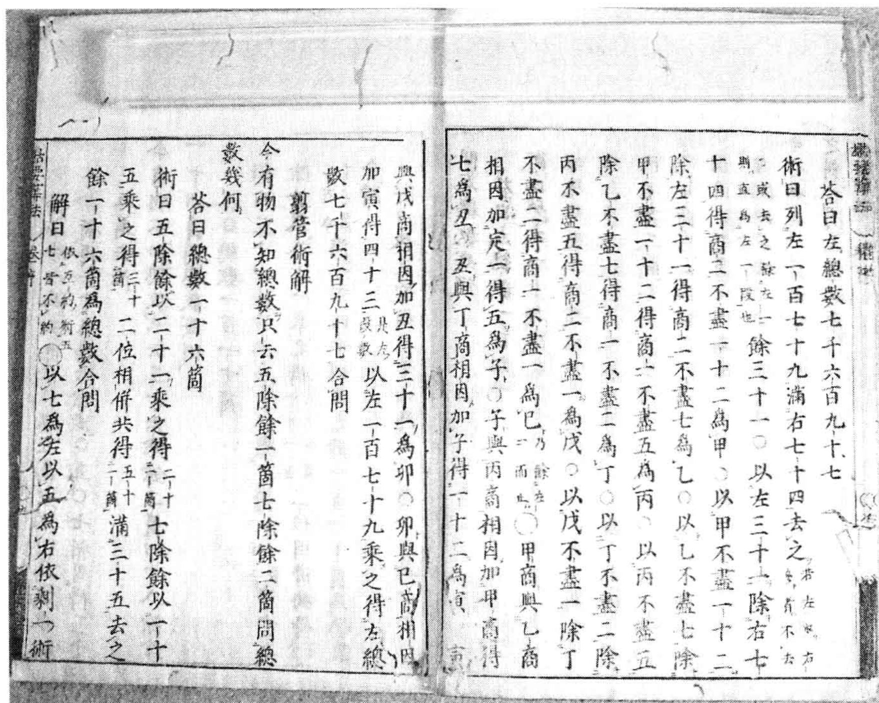

答曰左總數七千六百九十七
術曰列左一百七十九滿右七十四去之
餘三十一〇以左三十一除右七十四得商二不盡一十二為甲〇以甲不盡一十二除左三十一得商二不盡七為乙〇以乙不盡七除甲不盡一十二得商一不盡五為丙〇以丙不盡五除乙不盡七得商一不盡二為丁〇以丁不盡二除丙不盡五得商二不盡一為戊〇以戊不盡一除丁不盡二得商一不盡一為己〇甲商與乙商相因加定一得五為子〇子與丙商相因加甲商得七為丑〇丑與丁商相因加子得一十二為寅〇寅與戊商相因加丑得三十一為卯〇卯與己商相因加寅得四十三以左一百七十九乘之得左總數七千六百九十七合問
翦管術解
今有物不知總數只云五除餘一箇七除餘二箇問總數幾何
答曰總數一十六箇
術曰五除餘以二十一乘之得二十一箇七除餘以一十五乘之得三十箇二位相併共得五十一箇滿三十五去之餘一十六箇為總數合問
解曰〇以七為左以五為右依剩一術

图 6.3　关孝和《括要算法》中的剪管术

第四问：

今有物，不知总数，只云，六除余三个，八除余三个，十除余五个，问总数几何？

答曰：总数七十五个。

术曰：六除余、以四十乘之，得一百二十个；八除余、以一百零五乘之，得三百一十五个；十除余、以九十六乘之，得四百八十个；三位相并，共得九百一十五个，满一百二十去之，余七十五个，为总数。合问。

解曰：依逐约术，六为三、八不约、十为五。八、五相因，得四十，为左，

以三为右，依剩一术，得四十，为六除法；三、五相因，得一十五，为左，以八为右，依剩一术，得一百零五，为八除法；三、八相因，得二十四，为左，以五为右，依剩一术，得九十六，为十除法；三、八、五相乘，得一百二十、为去法。

该题所要解的同余式组为 $x \equiv 3 \pmod 6 \equiv 3 \pmod 8 \equiv 5 \pmod{10}$，即 $A_1 = 6$，$A_2 = 8$，$A_3 = 10$，$R_1 = 3$，$R_2 = 3$，$R_3 = 5$。

首先按逐约术把 A_1，A_2，A_3 化成两两互素的 a_1，a_2，a_3，得 $a_1 = 3$，$a_2 = 8$，$a_3 = 5$，对 $a_2 a_3 k_1 - a_1 y = 1$ 按照剩一术求解，得 $k_1 = 40$；对 $a_1 a_3 k_2 - a_2 y = 1$ 按照剩一术求解，得 $k_2 = 105$；对 $a_1 a_2 k_3 - a_3 y = 1$ 按照剩一术求解，得 $k_3 = 96$。然后计算 $x = k_1 R_1 + k_2 R_2 + k_3 R_3 - [a_1, a_2, a_3]p = 40 \times 3 + 105 \times 3 + 5 \times 96 - 120p = 915 - 7 \times 120 = 75$。

在以上计算中，$a_2 a_3 = \dfrac{[a_1, a_2, a_3]}{a_1}$，$a_1 a_3 = \dfrac{[a_1, a_2, a_3]}{a_2}$，$a_1 a_2 = \dfrac{[a_1, a_2, a_3]}{a_3}$，相当于秦九韶大衍总数术中的"衍母 M_1，M_2，M_3"；$a_2 a_3 k_1 - a_1 y = 1$ 相当于大衍术中的 $M_1 k_1 - a_1 y = 1$，即 $M_1 k_1 \equiv 1 \pmod{a_1}$。

第六问如下：

> 今有物，不知总数，只云：三十五乘，四十二除，余三十五个；四十四乘，三十二除，余二十八个，四十五乘、五十除，余三十五个，问总数几何？
>
> 答曰：总数一十三个。
>
> 术曰：三十五乘、四十二除余，七约之，以八十乘之，得四百个；四十四乘、三十二除余，四约之，以七十五乘之，得五百二十五个；四十五乘、五十除余，五约之，以二十四乘之，得一百六十八个；三位相并，共得一千零九十三个，满一百二十去之，余一十三个，为总数，合问。
>
> 解曰：三十五与四十二互减，得等数七[是三十五乘、四十二除之约法]，以约三十五乘、四十二除，为五乘、六除；四十四与三十二互减，得等数四[是四十四乘、三十二除之约法]，以约四十四乘、三十二除，为一十一乘、八除。四十五与五十互减，得等数五[是四十五乘、五十除之约法]，以约四十五乘、五十除，为九乘、一十除。
>
> 六除、八除、一十除，依逐约术得三除、八除、五除，各相乘得一百二

五乘	三除
一十一乘	八除
九乘	五除

十，为去法。

依图布算。

以五乘为左、三除为右，依剩一术、得左二段；以一十一乘为左、八除为右，依剩一术得左三段；以九乘为左、五除为右，依剩一术得左四段。

八除、五除相因，得四十为左，以三除为右，依剩一术得四十；以左二段乘之，得八十，为三十五乘、四十二除法；三除、五除相因，得一十五为左，以八除为右，依剩一术得一百零五，以左三段乘之，得三百一十五，满一百二十去之，余七十五，为四十四乘、三十二除法；三除、八除相因，得二十四为左，以五除为右，依剩一术得九十六，以左四段乘之，得三百八十四，满一百二十去之，余二十四，为四十五乘、五十除法。

该题所要解的同余式组为 $35x\equiv35(\mathrm{mod}\,42)$，$44x\equiv28(\mathrm{mod}\,32)$，$45x\equiv35(\mathrm{mod}\,50)$。

首先对这三式分别约去公因子 7,4,5，进行约简，化为

$$5x\equiv5(\mathrm{mod}\,6),11x\equiv7(\mathrm{mod}\,8),9x\equiv7(\mathrm{mod}\,10)$$

$$b'_1x\equiv R'_1(\mathrm{mod}\,A'_1),\ b'_2x\equiv R'_2(\mathrm{mod}\,A'_2),\ b_3x\equiv R'_3(\mathrm{mod}\,A'_3)$$

即 $b'_1=5$，$b'_2=11$，$b'_3=9$，$R'_1=5$，$R'_2=7$，$R'_3=7$，$A'_1=6$，$A'_2=8$，$A'_3=10$。

对 $A'_1=6$，$A'_2=8$，$A'_3=10$，按照逐约术得 $a_1=3$，$a_2=8$，$a_3=5$，并且得 $M=[a_1,a_2,a_3]=120$，用剩一术分别解

$$b'_1k_1-a_1y=1,\ b'_2k_2-a_2y=1,\ b'_3k_3-a_3y=1$$

得 $k_1=2$，$k_2=3$，$k_3=4$。

按照剩一术解 $a_2a_3\lambda_1-a_1y=1$，得 $\lambda_1=40$，$k_1\lambda_1=80$，因 $80<120$，故直接取 $k_1\lambda_1=80=\mu_1$，

按照剩一术解 $a_1a_3\lambda_2-a_2y=1$，得 $\lambda_2=105$，$k_2\lambda_2=315$，因 $315>120$，故取 $k_2\lambda_2-120\times2=75=\mu_2$，

按照剩一术解 $a_1a_2\lambda_3-a_3y=1$，得 $\lambda_3=96$，$k_3\lambda_3=384$，因 $384>120$，故取 $k_3\lambda_3-120\times3=24=\mu_3$，

于是 $x=R'_1\mu_1+R'_2\mu_2+R'_3\mu_3-pM=5\times80+7\times75+7\times24-120\times90=13$。

一般地，对于求解同余式组

$$b_1x \equiv R_1(\bmod A_1),\ b_2x \equiv R_2(\bmod A_2),\ \cdots,\ b_nx \equiv R_n(\bmod A_n)$$

第一步：首先对乘法 b_i，余数 R_i，除法 A_i，进行约简，得

$$b'_1x \equiv R'_1(\bmod A'_1),\ b'_2x \equiv R'_2(\bmod A'_2),\ \cdots,\ b'_nx \equiv R'_n(\bmod A'_n)$$

第二步：对模数 $A'_1, A'_2, \cdots, A'_n$，按照逐约术化成两两互素的模数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，并求最小公倍数 $M=[a_1, a_2, \cdots, a_n]=[A'_1, A'_2, \cdots, A'_n]$，这里 $(a_i, a_j)=1$，并且 $a_i \mid A'_i$；

第三步：按照剩一术分别解 $b'_ik_i - a_iy = 1$，得到 k_i；

第四步：按照剩一术分别解 $\dfrac{M}{a_i}\lambda_i - a_iy = 1$，得到 λ_i；

第五步：求 μ_i 与 x。当 $k_i\lambda_i < M$ 时，$\mu_i = k_i\lambda_i$；当 $k_i\lambda_i > M$ 时，$\mu_i = k_i\lambda_i - p_iM$；

最后按 $x = \sum_{i=1}^{n}\mu_i R'_i - pM$ 求出所要求的 x。

第八问如下：

今有物、总数三十四个，不知相乘数，只云，八除、余六个；二十除、余一十四个；二十七除、余二十三个；问相乘数几何？

答曰：相乘数一十一。

术曰：八除余，以二约之、以四百零五乘之，得一千二百一十五个；二十除余，以二约之、以一百零八乘之，得七百五十六个；二十七除余，以二百二十乘之，得五千零六十个；三位相并，共得七千零三十一个，满五百四十去之，余一十一个，为相乘数，合问。

解曰：总数三十四与八除互减，得等数二[是八除之约法]，以约总数、八除，为一十七数、四除；总数三十四与二十除互减，得等数二[是二十除之约法]，以约总数、二十除、为一十七数、一十除；总数三十四与二十七除互减，无等数。四除、一十除、二十七除，依逐约术得四除、五除、二十七除。各相乘，得五百四十，为去法。

𝍩𝍦 总数	𝍣 四除
𝍩𝍦 总数	𝍤 五除
𝍫𝍣 总数	𝍪𝍦 二十七除

依图布算。

以一十七为左、以四除为右，依剩一术得左一段。

以一十七为左、以五除为右，依剩一术得左三段。

以三十四为左、以二十七除为右，依剩一术得左四段。

五除、二十七除相乘，得一百三十五为左，以四除为右，依剩一术得四百零五，以左一段乘之，得四百零五，为八除法。

四除、二十七除相乘，得一百零八为左，以五除为右，依剩一术得二百一十六，以左三段乘之，得六百四十八，满五百四十去之，余一百零八，为二十除法。

四除、五除相乘，得二十为左，以二十七除为右，依剩一术得四百六十，以左四段乘之，得一千八百四十，满五百四十去之，余二百二十，为二十七除法。

该题所要解的同余式组为 $34x \equiv 6 (\mathrm{mod}\, 8) \equiv 14 (\mathrm{mod}\, 20) \equiv 23 (\mathrm{mod}\, 27)$ 首先对这三式分别约去公因子 2，2，1，进行约简，化为

$$17x \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 4),\ 17x \equiv 7 (\mathrm{mod}\, 10),\ 34x \equiv 23 (\mathrm{mod}\, 27)$$

然后按照第八问的方法计算。显然第八问、第九问可以作为第六问类型的特例。

关孝和剪管术也具有一般性，与秦九韶大衍总数术相比，存在以下几点异同：

① 关氏剪管术处理的同余式组类型比秦氏大衍术要丰富，关氏处理了 3 种类型：

类型Ⅰ：$x \equiv R_i (\mathrm{mod}\, A_i)$

类型Ⅱ：$b_i x \equiv R_i (\mathrm{mod}\, A_i)$

类型Ⅲ：$bx \equiv R_i (\mathrm{mod}\, A_i)$

《大成算经》又增加了类型Ⅳ：$x \pm C_i \equiv R_i (\mathrm{mod}\, A_i)$

类型Ⅴ：$x \div C_i \equiv R_i (\mathrm{mod}\, A_i)$

类型Ⅵ：$b_i (x \pm C_i) \div D_i \equiv R_i (\mathrm{mod}\, A_i)$

可能受《孙子算经》“物不知数”问题和历法问题的影响，秦氏处理的只是类型Ⅰ。

② 对于类型Ⅰ的求解，两者算法步骤一致。主要分三个步骤：关氏的

互约、逐约、齐约、遍约等演算，实际就是秦氏“化问数为定数”的演算；关氏的剩一术就是秦氏的大衍求一术，算法程序完全一致，但前者为一次不定方程，后者为一次同余式；最后一步都使用中国剩余定理(《孙子算经》与《杨辉算法》中使用过的公式)。

关孝和之后，剪管术成为和算家传习、研究的基本内容之一，承传于各流派的算法免许状目录以及各类和算书中。稿本《剪管法五条》(署关孝和编撰、山路主住校订、菅野元健再校)中，剪管有五法：即累减式(应用剩一术者)、累加式(应用朒一术者)、括式(所得之式宜括之者，谓之括式。藤田贞资(Fujita Sadasuke，1734～1807)曾著《剪管括法》以阐明之)、约数(所得式数宜约之者，谓之约数。即约去系数的公约数)、变数(答数变换而适合其题数者，宜尽其变，谓之变数)。

松永良弼的《算法集成》和《算法类聚》也收入诸约与剪管问题，方法基本上也是关孝和的方法，但在其《燕尾猿臂两术》、《桃李蹊径》中讨论了各类一次不定方程的解法。关流算法的保存与整理者户板保佑(Toita Yasusuke，1708～1784)把关流诸约术与剪管术内容收入《关算前传》第十三至十七(剪管习学传)与《关算要传》第五十五(剩一术)之中，并在《关算前传》第五(诸约传)中提出所谓的“植新术”，以方程术解剪管问题，事实上户板保佑的方法不具一般性，是错误的[1]。

关流之外，会田安明对剪管问题研究最多，其《诸约混一术》(1784)、《算法诸约术》(时间不详)、《诸约算题集》(时间不详)等书中，都有剪管专节。幕末以诸约、剪管冠名的和算著作还有：

本多利明(Honda Toshiaki，1743? ～1821)的《括要算法剪管术细草》(1797)；

藤田嘉言(Fujita Yoshitoki，1772～1828)的《括要算法剪管详解》(时间不详)；

石黑信由(Ishikuro Nobuyoshi，1760～1836)的《演段剪管前编》(1797)《演段剪管后编》(时间不详)、《分位下剪管》(1800)、《剪管术定格》(时间

---

〔1〕 学士院. 明治前日本数学史[M]. 第三卷. 東京：岩波書店，1957：286.

不详)；

岩井重远(Iwai Shigetō，1804～1878)的《天元剪管》(1830)；

剑持章行(Kenmochi Akiyuki，1790～1871)的《算法约术新编》(1862)、《算法诸约剪管术》(时间不详)；

等等，难以一一罗列。

6.4 清代数学家的不定分析研究

黄宗宪，字玉屏，号小谷，湖南新化人。1871年拜丁取忠为师，并协助校订《白芙堂算学丛书》。1876年随清政府第一任公使郭嵩焘出使英国，后又去法国和西班牙，1882年回国。于1862年著《求一术通解》二卷，收入《白芙堂算学丛书》，1874年出版。又收入《古琴古砚斋算稿》。该书是自张敦仁、骆腾凤、时曰醇的工作之后，对秦九韶"大衍术"研究十分深入且富有创意的著作。

对于求解同余式组：$N \equiv R_i(\mathrm{mod}\,A_i)\ (i=1, 2, \cdots, n)$，秦九韶的"大衍术"解法分为三个步骤：

① 将问数 A_i 化为两两互素的定母 a_i，使

$(a_i, a_j)=1\ (i \neq j)$，$a_i \mid A_i$，且 $[a_1, a_2, \cdots, a_n]=[A_1, A_2, \cdots, A_n]=M$

② 用"大衍求一术"求乘率 k_i，使 $k_i g_i \equiv 1(\mathrm{mod}\,a_i)$，这里 $\frac{M}{a_i}=M_i$ 为衍数，即 $M_i \equiv g_i(\mathrm{mod}\,a_i)\ (g_i < a_i)$，$g_i$ 称作奇数，即 $k_i g_i \equiv k_i M_i \equiv 1(\mathrm{mod}\,a_i)$；

③ 求用数 s_i 并用"孙子定理"求 N，即泛用数 $s_i=k_i M_i$，于是 $N=\sum_{i=1}^{n} R_i s_i - PM$ (P 为非负整数)。

黄宗宪在《求一术通解》中，对秦氏算法程序作了三方面的修正，其在该书前的例言中称：

> 一求定母，旧术极繁，至《求一术指》，稍归简捷，而约分之理，仍不易明。今析各泛母为极小数根，了如指掌，遇题有多式者，一索无遗。
>
> 一求乘率，旧术先以奇定相求，得奇一，再立天元累乘累加，亦觉眩

目。今以定母衍数对列，辗转相减，递求寄数，即为乘率，不立天元。

一旧术有借用数之法，赘设，删之[1]。

其化问数为定母的方法是：

求定母法，前法析泛母毕，乃遍视各同根[如三与三、五与五之类]。取某行最多者用之，余行所有，弃之不用。再视本行所有异根[如三与五之类]，或少于他行，则弃之[因他行已用，则此行必弃]；抑或多于余行，亦用之。或与他行最多者等，则此两行随意用之[用此则弃彼，用彼则弃此]。以所用数根连乘之，即得本行定母。若某行各根皆少于他行者，则此位无定母。

这正是我们今天所用的素因数分解求定数方法。此法最早出现于高斯(C. F. Guass，1777～1855)的《算术研究》(1801)一书中。

黄宗宪用素因数分解的方法对秦九韶化问数为定数的算法进行改进，是受西学的影响，这种改进，从今日数学的角度来看，使定数计算原理较为清晰，理论臻于完善，但是从算法的角度来看，秦九韶方法因其机械性则更富实用价值[2][3]。

对于求乘率 k_i 的求一术，就算法程序而言，秦九韶"立天元一"的目的主要是布筹定位，标志循环演算程序的起点，完全是可有可无的[4]。因此黄宗宪《求一术通解》主张删去，其法改为：

列定母于右行，[左角上预寄一数]，辗转累减，[凡定母与衍数展转累减，则其上所寄数，必展转相加]，至衍数余一即止，视左角上寄数为乘率[5]。

即以 M_i 与 a_i 入算，事实上 $k_i g_i \equiv k_i M_i \equiv 1 (\mathrm{mod}\, a_i)$。演算程式与秦氏基本一致，秦氏以奇居右上，须使右上末后奇一为止，而黄宗宪以奇左下，故须使左下末后奇一而止。

---

[1] 黄宗宪. 求一术解[A]. 白芙堂算学丛书[Z]. 同治十三年(1874)刊.

[2] 袁向东，李文林：《数书九章》中的大衍类问题及大衍总数术[J]. 秦九韶与《数书九章》[C]. 北京：北京师范大学出版社. 1987：159.

[3] 李继闵：关于"大衍总数术"中求定数算法的探讨[A]. 秦九韶与《数书九章》[C]. 北京：北京师范大学出版社，1987：220.

[4] 李继闵. "大衍求一术"溯源[A]. 秦九韶与《数书九章》[C]. 北京：北京师范大学出版社，1987：144.

[5] 黄宗宪. 求一术解[A]. 白芙堂算学丛书[Z]. 同治十三年(1874)刊.

黄宗宪又设“求反乘率”一法。所谓反乘率，即指满足 $k'_i g_i \equiv k_i' M_i \equiv -1 (\mathrm{mod}\, a_i)$ 的 k_i'。黄氏求反乘率的方法也与大衍求一术大致相同，以衍数 M_i 与定母 a_i 作辗转相除，演算程序如下：

寄 数		衍 数	定 母		寄 数
$c_0 = 1$	q_0	M_i aq_0	a_i $r_0 q_0$	q_1	$c_1 = 1$
$c_2 = q_2 c_1 + 1$	q_2	r_0 $r_1 q_2$	r_1 $r_2 q_3$	q_3	$c_3 = q_3 c_2 + c_1$
$c_4 = q_4 c_3 + c_2$	q_4	r_2 $r_3 q_4$	r_3 $r_4 q_5$	q_5	$c_5 = q_5 c_4 + c_3$
…	…	…	…	…	…
$c_{2t-2} = q_{2t-2} c_{2t-3} + c_{2t-4}$	q_{2t-2}	r_{2t-4} $r_{2t-3} q_{2t-2}$	r_{2t-3} $r_{2t-2} q_{2t-1}$	q_{2t-1}	$c_{2t-1} = q_{2t-1} c_{2t-2} + c_{2t-3}$
$c_{2t} = q_{2t} c_{2t-1} + c_{2t-2}$	q_{2t}	r_{2t-2} $r_{2t-1} q_{2t}$	r_{2t-1} $r_{2t} q_{2t+1}$	q_{2t+1}	$c_{2t+1} = q_{2t+1} c_{2t} + c_{2t-1}$
		$r_{2t} = 1$	$r_{2t+1} = 1$		

按秦氏“求一术”，以奇数 g_i 与定母 a_i 入算，程序至左边奇数(衍数)下余数 $r_{2t} = 1$ 而止，归算寄数得乘率 $k_i = c_{2t} = q_{2t} c_{2t-1} + c_{2t-2}$。黄氏求反乘率在秦氏程序求得余数 $r_{2t-1} = 1$ 基础上再演算一步，至右边定母下余数 $r_{2t+1} = 1$ 而止，从而归算寄数得到反乘率，$k'_i = c_{2t+1} = q_{2t+1} c_{2t} + c_{2t-1}$。

事实上，若令

$$d_2 = q_2,\ d_3 = q_3 d_2 + 1,\ d_4 = q_4 d_3 + d_2,\ \cdots,\ d_{2t} = q_{2t} d_{2t-1} + d_{2t-2},$$
$$d_{2t+1} = q_{2t+1} d_{2t} + d_{2t-1},$$

则有 $r_1 = a_i - g q_1 = a_i - c_1 g_i$

$$r_2 = g_i - r_1 q_2 = g_i - (a - c_1 g_i) q_2 = c_2 g_i - d_2 a_i$$

$$r_3 = r_1 - r_2 q_3 = r_1 - (a_i - c_1 g_i) - (c_2 g_i - d_2 a_i) q_3 = d_3 a_i - c_3 g_i$$

…… …… ……

$$r_{2t-1} = r_{2t-3} - r_{2t-2} q_{2t-1} = \cdots = d_{2t-1} a_i - c_{2t-1} g_i$$

$$r_{2t} = r_{2t-2} - r_{2t-1} q_{2t} = \cdots = c_{2t} g_i - d_{2t} a_i$$

$$r_{2t+1} = r_{2t-1} - r_{2t} q_{2t+1} = \cdots = d_{2t+1} a_i - c_{2t+1} g_i$$

当 $r_{2t+1} = 1$ 时，$c_{2t+1} g_i = d_{2t+1} a_i - 1$，即 $c_{2t+1} g_i \equiv -1 (\mathrm{mod}\, a_i)$，从而

$k'_i = c_{2t+1}$。这就证明了黄氏的“反乘率”也是符合数理的。

黄宗宪还利用反乘率概念自创求总数 N 之新法，法曰：

> 先取题中减数最大者命为甲，其本位剩数为子。又取略小于甲之减数为乙，其本位剩数为丑。乃以甲乙求等，以等约乙，[无等不约，或以等约乙，得数，与甲仍有等者，则不约乙而约甲。或任约甲约乙俱有等者，则用析根法求之。后仿此]甲乙相乘得甲′，以乙累减子，余丙。又以乙累减甲，余丁。于丙内减去一丑[不足减者，加一乙以减之，下同]，余戊。以乙[比定母]丁[比衍数]对列两行，求得反乘率，以乘戊，得己。甲乙相乘得庚。并子庚得辛，以甲′累减辛，余子′[以上为一次求法][1]。

对于求解同余式组：$N \equiv R_i \pmod{A_i}$ $(i = 1, 2, 3, \cdots, n)$　　　(＊)

黄氏反乘率新术分以下几个步骤：

(1) 将问数 A_i 从大到小地排列，不妨为 $A_1 > A_2 > A_3 > \cdots > A_n$

(2) 做子算法，求解 $N \equiv R_1 \pmod{A_1} \equiv R_2 \pmod{A_2}$：　　　(＊＊)

① 将其化为等价的同余式组：$N \equiv R_1 \pmod{a_1} \equiv R_2 \pmod{a_2}$。这里 $(a_1, a_2) = 1$，并且 $[a_1, a_2] = [A_1, A_2] = a_1 a_2 = p_1$；

② 再求出 B 及 C，使 $R_1 \equiv B \pmod{a_2}$，$a_1 \equiv C \pmod{a_2}$，要求 $B < a_2$，$C < a_2$；

③ 求 D：$D = B - R_2 > 0$，若 $B < R_2$，则 $D = (B + a_2) - R_2 > 0$；

④ 以 a_2（比定母）与 C（比衍数）入求一术，求反乘率 k'_i，使 $k'_i C \equiv -1 \pmod{a_2}$；

⑤ 求同余式组(＊＊)的解 r_1：

$$Dk'_i = E,\ Ea_1 = F,\ F + R_1 = G，则\ r_1 \equiv G \pmod{p_1}。$$

(3) 作迭代，求解同余式组：$N \equiv r_1 \pmod{p_1} \equiv R_3 \pmod{A_3}$，再用子算法(2)得其解 $r_2 \equiv G_1 \pmod{p_2}$，其中 $p_2 = [p_1, A_3]$，继续作以下迭代演算：

$$r_k \to R_1,\ p_k \to A_1,\ R_{k+2} \to R_2,\ A_{k+2} \to A_2\ (k = 1, 2, 3, \cdots, n-2)$$

其中：$r_k \equiv G_{k-1} \pmod{p_k}$；$p_k = [p_{k-1}, A_{k+1}]$，最后得到同余式组(＊)的解为 $N \equiv r_{n-1} \pmod{p_{n-1}}$。

---

[1] 黄宗宪. 求一术解[A]. 白芙堂算学丛书[Z]. 同治十三年(1874)刊.

可以证明,黄宗宪的这一新法是合乎数理的,与 Euler 的解法同理[1]。

《求一术通解》对秦九韶的"借用"也有研究。秦氏称 $s_i = k_iM_i$ 为"泛用数",且称满足 $\sum_{i=1}^{n} s_i = M + 1$ 的 s_i 为正用。而实际上总有 $\sum_{i=1}^{n} s_i \equiv 1 \pmod{M}$,故正用乃其特殊情形。同时,对于泛母 $\sum_{i=1}^{n} s_i = tM + 1$,秦氏引入"借数"方法而化泛用为正用。称:

① "或泛母多衍母倍数者,验元数奇偶,同类者,损其半倍(或三处同类,以三约衍母,于三处损之)各为正用数。"即当 $t \geqslant 2$ 时,若 A_i 与 A_j 同偶(有公因子),则将其相应的泛用 s_i 和 s_j 改为 $s_i - \frac{M}{2}$ 与 $s_j - \frac{M}{2}$。若 A_i, A_j, A_k, …, A_l 同偶(有公因子 d),则选取 h_i, h_j, h_k, …, h_l,使 $h_i + h_j + h_k + \cdots + h_l = hd$,而将其相应的泛用 s_i, s_j, s_k, …, s_l 改为 $s_i - \frac{h_i M}{d}$, $s_j - \frac{h_j M}{d}$, $s_k - \frac{h_k M}{d}$, …, $s_l - \frac{h_l M}{d}$。

② "或定母得一而衍数同衍母者,为无用数。当验元数同类者,而正用至多处用之,以等约衍母为借数,以借数损有以益其无,为正用。或多处无者,如意立数为母,约衍母,所得以如意子乘之,均借补之。或欲从省勿借,任之为空可也。" 即,若 $a_i = 1$ ($s_i = 0$),且 A_i 与 A_j 有公因子 d,则将其相应的泛用 s_i 和 s_j 改为 $0 + \frac{M}{d}$ 与 $s_j - \frac{M}{d}$。

若 $a_i = a_j = a_k = \cdots = a_l = 1$,且 A_q 与 A_i, A_j, A_k, …, A_l 有公因子 d,则将其相应的泛用 s_i, s_j, s_k, …, s_l, s_q 改为 $\frac{h_i M}{d}$, $\frac{h_j M}{d}$, $\frac{h_k M}{d}$, …, $\frac{h_l M}{d}$ 及 $s_q - \frac{(h_i + h_j + h_k + \cdots + h_l)M}{d}$。

容易证明上述改造的用数完全满足同余式组,然而就同余式组求解的算理而言,正用概念是毫无用处的,秦九韶赘设此化泛用为正用的"借数"方

[1] 王翼勋. 一次同余式组的欧拉解法和黄宗宪反乘率新术[J]. 自然科学史研究,1996,15(1):40.

法，可能是讨论同余式组可解条件的尝试[1]。黄宗宪也认识到秦氏“借用”内容的多余性，主张删去。

在《求一术通解》中，黄宗宪还对求一术与孙子定理给出了不十分严密的证明，这是孙子定理与大衍求一术在中国发明以后，中国数学家的首次理论证明[2]。同时还讨论了求一术在解二元一次不定方程方面的应用。黄宗宪关于同余式组求解的研究，丰富和深化了中国传统数学的不定分析方法，在其理论化方面具有一定的意义。

---

〔1〕莫绍揆．论秦九韶大衍总数术[A]．数学史研究文集[C]第四辑．呼和浩特：内蒙古大学出版社，台北：九章出版社，1993：29.

〔2〕李文铭．黄宗宪对孙子定理和求一术的预备性证明[A]．数学史研究文集[C]．第三辑．呼和浩特：内蒙古大学出版社，台北：九章出版社，1992：112.

第 7 章

丢番图逼近算法：零约术*

和算中的“诸约术”包括互约、逐约、齐约、遍约、零约、增约、损约、累约、重约、添约诸术，增约、损约、添约三术属于无穷几何级数求和算法，互约、逐约、齐约、遍约是围绕一次同余式组求解的算法，零约、累约、重约是关于实数有理逼近的算法。本章分析零约、累约、重约这些不定分析算法的数理基础，论述和算家在丢番图逼近方面的成就，并探讨这些算法的中算源流。认为和算家关孝和、建部贤弘和久留岛义太等人在处理实数的有理逼近问题时，不仅采用了和内插与连分数两种基本方法，而且还涉及二次无理数的有理逼近和实数的联立有理逼近等问题，其算法与中算通其率、调日法、大衍术等有着深刻联系和渊源关系，表明中算不定分析算法在和算中获得新发展。

7.1 实数的有理逼近法[1]

用有理数逼近无理数，是丢番图逼近论中的一个最基本课题。首先介绍几个逼近定理和逼近方法。

7.1.1 Dirichlet 定理

定理 7.1 设 α 和 Q 是任意实数，且 $Q>1$，则存在整数 p 和 q，满足

---

* 本章内容的主体曾发表于《数学史研究》（日本），2004，183(4).

〔1〕 本节内容参考：朱尧辰，王连祥著. 丢番图逼近引论[M]. 北京：科学出版社，1997.

$$1 \leqslant q < Q \tag{7.1}$$

$$\left| Q - \frac{p}{q} \right| \leqslant \frac{1}{Qq} \tag{7.2}$$

证明：假定 Q 是整数，考虑下面 $Q+1$ 个实数：

$$0,\ \{\alpha\},\ \{2\alpha\},\ \cdots,\ \{(Q-1)\alpha\},\ 1 \tag{7.3}$$

这里{　}表示分数部分，显然这些数都位于单位区间[0, 1]上。若把单位区间分成 Q 个长度相同的子区间：

$$\left[\frac{u}{Q},\ \frac{u+1}{Q}\right),\ u=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ Q-2,\ \left[1-\frac{1}{Q},\ 1\right] \tag{7.4}$$

根据抽屉原理，式(7.3)的 $Q+1$ 个点中至少有两个落在式(7.4)Q 个子区间中的一个，因此存在整数 r_1, r_2, s_1, s_2，其中 $0 \leqslant r_i \leqslant Q-1$, $i=1, 2$，并且 $r_1 \neq r_2$，使得

$$|(r_1\alpha - s_1) - (r_2\alpha - s_2)| \leqslant \frac{1}{Q}$$

不失一般性，可假定 $r_1 > r_2$，因此，设 $q = r_1 - r_2$, $p = s_1 - s_2$，便证明了不等式(7.1)和(7.2)对于整数 Q 成立。

若 Q 非整数，设 $Q' = [Q]+1$，则由上述证明可知，不等式(7.1)和不等式(7.2)对于整数 Q'成立。但由不等式 $1 \leqslant q < Q'$，并注意 q 是整数，可推出 $1 \leqslant q \leqslant [Q] < Q$，显然有 $\frac{1}{Q'} < \frac{1}{Q}$，因此不等式(7.1)和不等式(7.2)对于非整数 Q 也成立。于是定理得证。

推论 7.1.1　如果 α 是无理数，则存在无穷多对互素数 p 和 q，满足

$$\left| \alpha - \frac{q}{p} \right| < \frac{1}{q^2}. \tag{7.5}$$

证明：根据上面定理，对于任意 $Q>1$，存在整数 p'和 q'，满足 $1 \leqslant q' < Q'$, $|q'\alpha - p'| \leqslant Q^{-1}$。假定 $(p', q')=d$, $d \geqslant 1$。又设 $p' = dp$, $q' = dq$，则 $(p, q) = 1$，并且 $|q\alpha - p| \leqslant (dQ)^{-1} \leqslant Q^{-1}$。当 $Q \to \infty$ 时，必有无穷多个不同的整数 q 满足不等式(7.1)和不等式(7.2)。若不然，根据抽屉原理，

则存在一个正整数 q_0 与一个趋于无穷的无穷序列 $\{Q_n\}$ 相对应，使得 $|q_0\alpha - p_0| \leqslant (Q_n)^{-1} \to 0$（当 $n \to \infty$）。因此得到 $|q_0\alpha - p_0| = 0$，即 α 为有理数，这与假设矛盾。最后由不等式(7.1)和不等式(7.2)可直接推出不等式(7.5)式，故推论得证。

7.1.2 和内插与 Farey 序列

两个既约分数 $\frac{p}{q}$ 和 $\frac{p'}{q'}$，如果满足 $qp' - pq' = \pm 1$，则称它们为一对共轭分数。任意两个既约分数 $\frac{p}{q}$ 和 $\frac{p'}{q'}$，称 $\frac{p+p'}{q+q'}$ 为其和内插。如 $\frac{1}{2}$ 与 $\frac{1}{3}$ 是共轭分数，它们的内插和是 $\frac{2}{5}$。

定理 7.2　共轭分数的和内插为既约分数，并与原分数共轭。

证明：设 $\frac{p}{q}$ 和 $\frac{p'}{q'}$ 为共轭分数，不妨假定 $0 \leqslant \frac{p}{q} < \frac{p'}{q'}$，即满足 $p'q - pq' = 1$。

由此不难验证，它们的和内插位于它们之间，即 $\frac{p}{q} < \frac{p+p'}{q+q'} < \frac{p'}{q'}$。并且

$$p'(q+q') - (p+p')q' = (p+p')q - p(q+q') = p'q - pq' = 1$$

所以 $\frac{p+p'}{q+q'}$ 为既约分数，并且 $\frac{p}{q}$ 和 $\frac{p+p'}{q+q'}$，$\frac{p'}{q'}$ 和 $\frac{p+p'}{q+q'}$ 分别都是共轭分数。

若假定既约分数 $\frac{p}{q} \in (0, 1)$，不能由和内插产生，即必有由和内插产生的一对共轭分数 $\frac{a}{b}$ 和 $\frac{c}{d}$，适合

$$\frac{a}{b} < \frac{p}{q} < \frac{c}{d} \tag{7.6}$$

亦即不可能有等式出现。显然有

$$b \leqslant q, \text{ 且 } d \leqslant q \tag{7.7}$$

若不然，当 $b > q$ 时，有

$$\frac{c}{d}-\frac{p}{q}=\frac{cq-dq}{dq}\geqslant\frac{1}{dq}>\frac{1}{db}=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}$$

推出 $\frac{p}{q}<\frac{a}{b}$，这与式(7.6)矛盾。当 $d>q$ 时，有

$$\frac{p}{q}-\frac{a}{b}=\frac{pb-qa}{qb}\geqslant\frac{1}{qb}>\frac{1}{db}=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}$$

则 $\frac{p}{q}>\frac{c}{d}$，同样与式(7.6)矛盾。这时我们在 $\frac{a}{b}$ 和 $\frac{c}{d}$ 之间进行和内插，其分母将逐次增大，因新的和内插必然或落在 $\frac{a}{b}$ 和 $\frac{p}{q}$ 之间，或落在 $\frac{p}{q}$ 和 $\frac{c}{d}$ 之间，故必存在一对共轭分数满足不等式(7.6)，而不满足式(7.7)，因此 $\frac{p}{q}$ 必是某一对共轭分数的和内插。至此定理得证。

若从 0 与 1 出发，相继进行和内插，则可得 0 到 1 之间的一切既约分数。从 0,1 出发，相继进行和内插，得到以下既约分数(第 k 次和内插简记作 I_k，$k=0,1,2,\cdots,n,\cdots$)：

I_0：0　　1

I_1：$\frac{1}{2}$

I_2：$\frac{1}{3}$　$\frac{2}{3}$

I_3：$\frac{1}{4}$，$\frac{2}{5}$，$\frac{3}{5}$，$\frac{3}{4}$

I_4：$\frac{1}{5}$，$\frac{2}{7}$，$\frac{3}{8}$，$\frac{3}{7}$，$\frac{4}{7}$，$\frac{5}{8}$，$\frac{5}{7}$，$\frac{4}{5}$

I_5　$\frac{1}{6}$，$\frac{2}{9}$，$\frac{3}{11}$，$\frac{3}{10}$，$\frac{4}{11}$，$\frac{5}{13}$，$\frac{5}{12}$，$\frac{4}{9}$，$\frac{5}{9}$，$\frac{7}{12}$，$\frac{8}{13}$，$\frac{7}{11}$，$\frac{7}{10}$，$\frac{8}{11}$，$\frac{7}{9}$，$\frac{5}{6}$

在 0，1 之间的既约分数中，把分母不超过 n 的分数按大小顺序排成一序列，称为 n 级 Farey 序列 ($n\geqslant 1$)，记作 F_n。例如：

F_7：0，$\frac{1}{7}$，$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{5}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{2}{7}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{5}$，$\frac{3}{7}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{4}{7}$，$\frac{3}{5}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{5}{7}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{4}{5}$，$\frac{5}{6}$，$\frac{6}{7}$，1.

n 级 Farey 序列具有以下性质：Farey 序列中任意相邻两数为共轭分数。

由此定理可以得到以下两个推论：

推论 7.2.1　如果 $n\geqslant 2$，则 F_n 中任意相邻二数的分母不相等。

推论 7.2.2　Farey 序列中任意一数是左右相邻二数的和内插。

Hurwitz 定理　对每个无理数 α，存在无穷多个不同的有理数 $\frac{p}{q}$ 满足

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{\sqrt{5}q^2} \tag{7.8}$$

这种和内插的方法主要依据下述性质[1]。

定理 7.3　对于共轭分数 $\frac{p}{q}$ 和 $\frac{p'}{q'}$，有 $qp'-pq'=\pm 1$，其和内插为 $\frac{p+p'}{q+q'}$ 为既约分数，并与原分数 $\frac{p}{q}$ 及 $\frac{p'}{q'}$ 都共轭。并且当 $0\leqslant\frac{p}{q}<\frac{p'}{q'}$ 时，有 $\frac{p}{q}<\frac{p+p'}{q+q'}<\frac{p'}{q'}$。

定理 7.4　当 ϑ 是有理数时，k 有限；当 ϑ 是无理数时，k 无限，且 $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{p_k}{q_k}=\vartheta$。

7.1.3　连分数与有理逼近

定理 7.5　① 有限连分数表示一个有理数；反之，对任意有理数 a，有且恰有两种方法展成有限连分数，即 $a=[a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n]$（其中 $n\geqslant 2$）和 $a=[a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n-1, 1]$。

② 对于无限连分数 $\vartheta=[a_1, a_2, \cdots]$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{p_n}{q_n}$ 存在，并且为一无理数；反之，对于任意无理数 ϑ，可以展成唯一的连分数 $\vartheta=[a_1, a_2, \cdots]$，使得 $\vartheta=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{p_n}{q_n}$。

定理 7.6　(Legendre, 1893)每个大于 1 的非完全平方的有理数 d 的平方根可展成拟纯周期连分数

$$\sqrt{d}=[a_0, \overline{a_1, a_2, \cdots, a_2, a_1, 2a_0}]，其中 a=[\sqrt{d}]$$

反之，满足上述形式的连分数必为一个大于 1 的非完全平方的有理数 d 的

[1] 朱尧辰，王连祥著. 丢番图逼近引论[M]. 北京：科学出版社，1997.

平方根。

定理7.7　实数ϑ可展成周期连分数的充要条件是：ϑ为二次无理数。

对于定理7.7，Euler于1737年证明了必要性，Lagrange于1770年证明了充分性[1]。

7.2 中国古代的通其率术与调日法

在《授时历》以前，中国古代历法由于没有采用十进小数，历法中的日法、闰周、交食周期、五星会合周期等天文常数都采用分数表示，它们往往是两个天体运动周期α和β的比值（如闰周是回归年与朔望月比的结果）。一般说来，天文常数α和β都是实数，因此，历学家需要根据α和β选择满足$\left|\frac{\alpha}{\beta}-\frac{y}{x}\right|<\varepsilon$（$\varepsilon$为预先设定的误差限）的自然数$x$和$y$，从而实数的有理逼近问题成为中国古代历法计算中的一个重要方法。

早在汉代《三统历》中就出现了所谓的“通其率”算法，以计算五星运动周期。为求两个有理数之比$\frac{a}{b}$的既约分数，“通其率”法没有采用通常先求a、b最大公约数，再用“等除法实”的约分术，而是采用与连分数展开法完全相同演算程序，不仅求出两数的最大公约数，而且同时也归算出$\frac{a}{b}$的渐近分数，因此它具有普遍意义，即对a、b为实数情形完全适用，具有数值逼近方面的意义。通过“通其率”演算，若$\frac{a}{b}$是有理数，则可得到其既约分数$\frac{p}{q}=\frac{a/d}{b/d}$；若$\frac{a}{b}$是无理数，则可得到其渐近分数$\frac{p_n}{q_n}$。这种“通其率”术由古老的求最大公约数的“更相减损”发展而来[2][3]。

中国古代历算中用有理分数逼近实数的另一典型算法是南北朝时代何

---

[1] 朱尧辰，王连祥著. 丢番图逼近引论[M]. 北京：科学出版社，1997：33.

[2] 李继闵. “通其率”考释[A]. 中国数学史论文集(一)[C]. 济南：山东教育出版社，1985：24.

[3] 李继闵. 中算家分数近似法探究[A]，中国数学史论文集[C](三)，济南：山东教育出版社，1987：28.

承天创制的“调日法”。为把朔望月表示成分数形式 $\frac{B}{A}=29+\frac{Y}{A}$ 日，需要确定数值较小（以便于计算）并且不损害历算所要求的精度之日法 A。根据实测可以知道，朔望月畸零部分 $\eta=0.5305887\cdots$，满足 $\frac{26}{49}<\eta<\frac{9}{17}$，调日法就是由此强弱二率出发，求出 η 的渐近分数序列 $\frac{26m+9n}{49m+17n}$ $(m=1, 2, 3, \cdots; n=1, 2, 3, \cdots)$，于是 $\frac{Y}{A}=\frac{26m+9n}{49m+17n}$，其中日法 $A=49m+17n$。

历史文献没有记载何承天调日法的具体演算方式，南宋秦九韶《数书九章》中关于调日法的演算是从不定方程 $49m+17n=A$ 出发，按照历法的具体要求来确定内插次数 m,n，从而获得 A，由此获得的 $\frac{26m+9n}{49m+17n}$ 并非实测数据的最佳渐近分数，但其演算方式对历算也还较实用[1]。当然秦氏调日法方式未必就是何承天的演算方式，不排除存在何承天法就是关孝和之和内插理想程序的可能性。

调日法与“通其率”演算有着深刻联系，在“通其率”术程序中，已经包含着两个渐近分数的和内插形式：$\frac{p_k}{q_k}=\frac{a_k p_{k-1}+p_{k-2}}{a_k q_{k-1}+q_{k-2}}$，并且只要对 $\frac{26}{49}$ 和 $\frac{9}{17}$ 进行连分数展开，就能够归算出 $\frac{26m+9n}{49m+17n}$，因此，何承天的调日法应该是由“通其率”算法演化而来。

“通其率”算法在历算中的另一种发展，是形成“大衍术”的子算法——“大衍求一术”。对 $\frac{a}{b}$ 施诸“通其率”，当 $n=2m$，且 $r_{2m}=1$ 时，取 $k=c_{2m}$，则 $\frac{p_n}{q_n}$ 是 $\frac{a}{b}$ 最佳渐近分数，于是有 $kp_n\equiv 1 \pmod{q_n}$，即 $|aq_n-bp_n|=1$，这就是所谓的“求一术”。“通其率术”与“求一术”演算程序的些微差别仅在于：

① 要求 $(a, b)=1$；

---

〔1〕 李继闵. 关于“调日法”的数学原理[J]. 西北大学学报，1985(2)：5.

② 略去 $p_i(i=1, 2, 3, \cdots, n)$ 的归算；

③ 归算 q_i时，从 $q_0=1$（即秦九韶所谓的立天元一）开始；

④ 要求末余 $r_{2m}=1$（须右上奇一而止）[1]。

由于没有实数理论，中算家对实数有理逼近与整数论的一次不定分析不加区别，从而约分、零约与求一术等算法互为一体，广泛应用于历算中，用“演纪术”和“大衍术”求上元积年问题乃其最为典型的算例[2][3]，所以秦九韶在《数书九章》序中说：“独大衍法不载九章，未有能推之者。历家演法颇用之，以为方程者误也”，说明了求一术源于历元的推算。

7.3　关孝和的零约术与和内插方法

把一个实数化成渐近有理分数的方法，和算家称之为“零约术”，这类问题最早出现于关孝和的著作中，其《规矩要明算法》、《拾遗诸约之法》、《括要算法》(1712)中都有相关内容，其次，在建部贤弘等人编著的《大成算经》(1711)以及建部贤弘的《缀术算经》(1722)中也有这种算法。

在《规矩要明算法》中，关孝和用他的零约术分别求出圆周率 π 和方率 $\sqrt{2}$的一系列渐近分数。如其求$\sqrt{2}$的渐近分数 $\left\{\frac{7}{5}, \frac{11}{7}, \frac{41}{29}, \cdots, \frac{58}{41}, \cdots\right\}$ 之术文如下：

> 今有方一尺，斜一尺四寸一分四厘二毫一丝强，问零约之内外亲疏方斜率各几何？
>
> 答曰：内疏方率五、斜率七；
>
> 外疏方率七、斜率十一；
>
> 内亲方率二十九、斜率四十一；
>
> 外亲方率四十一、斜率五十八。

---

〔1〕李继闵.“大衍求一术”溯源[A].秦九韶与数书九章[C].北京：北京师范大学出版社，1987：138.

〔2〕李继闵.“调日法”源流考[A].第三届国际中国科学史讨论会论文集[C].北京：科学出版社，1990：31.

〔3〕王荣彬，徐泽林. 关于“大衍术”源流的算例分析[J].自然科学史研究，1998(1)：47.

术曰：方率一、斜率一为初，以斜率为实，以方率为法，实如法而一，得数少于原斜者；斜率二、方率一，多于原斜者；斜率一、方率一，各累加之，得内外亲疏方斜率〔1〕。

根据这段术文，可知关氏方法的演算过程如下：

$$\frac{1}{1}<\sqrt{2}<\frac{2}{1},\ \frac{1}{1}<\sqrt{2}<\frac{1+2}{1+1}=\frac{3}{2},\ \frac{1+3}{1+2}=\frac{4}{3}<\sqrt{2}<\frac{3}{2},\ \frac{4+3}{3+2}=\frac{7}{5}<\sqrt{2}<\frac{3}{2},\ \frac{7}{5}<\sqrt{2}<\frac{7+3}{5+2}=\frac{10}{7},\ \frac{7}{5}<\sqrt{2}<\frac{7+10}{5+7}=\frac{17}{12},\ \frac{7+17}{5+12}=\frac{24}{17}<\sqrt{2}<\frac{17}{12},\ \frac{24+17}{17+12}=\frac{41}{29}<\sqrt{2}<\frac{17}{12},\ \frac{41}{29}<\sqrt{2}<\frac{41+17}{29+12}=\frac{58}{41},\ \cdots$$

图 7.1　《括要算法》贞卷中的零约术求圆周率近似值

《括要算法》贞卷(图 7.1)中，关孝和用同样的方法从 $\frac{3}{1}<\pi<\frac{4}{1}$ 出发，通过零约术得到分母为连续自然数的、自 $\frac{3}{1}$ 至 $\frac{355}{113}$ 的 113 个渐近分数，其零约术的算法程序可以归纳如下。

对于实数 ϑ，若已知 $\frac{p_0}{q_0}<\vartheta<\frac{p_1}{q_1}$，则通过对 $\frac{p_0}{q_0}$ 与 $\frac{p_1}{q_1}$ 进行一系列和内

〔1〕 関孝和. 規矩要明算法[A]. 平山諦，下平和夫，広瀬秀雄編：関孝和全集[Z]. 大阪：大阪教育図書株式会社，1974.

插，得到 ϑ 的系列渐近分数 $\frac{p_k}{q_k}$ $(k=0, 1, 2, \cdots)$。演算程序如下：

$$\frac{p_0+p_1}{q_0+q_1}=\frac{p_2}{q_2},$$

当 $\frac{p_0}{q_0}<\frac{p_2}{q_2}<\vartheta<\frac{p_1}{q_1}$ 时，则求 $\frac{p_2}{q_2}$ 与 $\frac{p_1}{q_1}$ 的内插和 $\frac{p_1+p_2}{q_1+q_2}=\frac{p_3}{q_3}$；

当 $\frac{p_0}{q_0}<\vartheta<\frac{p_2}{q_2}<\frac{p_1}{q_1}$ 时，则求 $\frac{p_2}{q_2}$ 与 $\frac{p_0}{q_0}$ 的内插和 $\frac{p_0+p_2}{q_0+q_2}=\frac{p_3}{q_3}$；

再比较 $\frac{p_3}{q_3}$，$\frac{p_2}{q_2}$，$\frac{p_1}{q_1}$ 和 ϑ 的大小(或比较 $\frac{p_3}{q_3}$，$\frac{p_2}{q_2}$，$\frac{p_0}{q_0}$ 和 ϑ 的大小)后，继续做和内插，逐此下去，依次得到 ϑ 的渐近分数序列 $\frac{p_k}{q_k}$ $(k=0, 1, 2, \cdots)$。

7.4　建部贤明的零约术与连分数展开法

关氏弟子建部贤明(1661～1716)对零约术加以改进，采用连分数展开的算法，建部贤弘在《大成算经》和《缀术算经》(图 7.2)中对建部贤明的零约术算法有过详细记述。《缀术算经》“探圆数”部分，据定周 $\pi=3.141\,592\,653\,589\,793\,238\,462\,643$ 值，求其渐近分数的演算如下：

> 置元一以除定周，得商与不尽为第一，以第一不尽除元一，得商与不尽为第二，以第二不尽除第一不尽，得商与不尽为第三，以第三不尽除第二不尽，得商与不尽为第四，以第四不尽除第三不尽，得商与不尽为第五，如此以其段之不尽除前段之不尽而求逐商，以元一为径率，第一商为周率，以此为一等弱率；以第二商为乘一等径周率，径率加元一为二等强率；以第三商为乘二等径周率，加一等径周率为三等弱率；以第四商为乘三等径周率，加二等径周率为四等强率；如此逐以次商乘其段径周率，加前段径周率为次段径周率，以求强弱渐亲率〔1〕。

即 $\frac{\pi}{1}=a_1$ 余 r_1，$\frac{1}{r_1}=a_2$ 余 r_2，$\frac{r_1}{r_2}=a_3$ 余 r_3，$\cdots$，$\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}}=a_n$ 余 r_n。

---

〔1〕 建部賢弘. 綴術算經[M]. 第十一“探圓數”. 東京大学藏抄本.

察スヘカラス一遍ノ増約ヲ用テ後玄ク探テ
累遍スルヿヲ會セリ
砕約ノ術ヲ用テ徑一尺ノ定周三尺一寸四一五
九二六五三五八九七九三二三八四六二六四三
三八三二七九五〇二八八四一九七一二強ヲ求
得テ零約ノ術ヲ以テ徑周ノ率ヲ造ル
元數一ヲ置郎尺ノ位ト定ム以テ定周ヲ除テ餘ニ
少ヲ以テ負ヲ除也得商ト不盡ヲ第一トス第一ノ不盡ヲ
以テ元數一ヲ除テ得商ト不盡ヲ第二トス第二
ノ不盡ヲ以テ第一ノ不盡ヲ除テ得商ト不盡ヲ
第三トス第三ノ不盡ヲ以テ第二ノ不盡ヲ除テ
得商ト不盡ヲ第四トス第四ノ不盡ヲ以テ第三
ノ不盡ヲ除テ得商ト不盡ヲ第五トス如此其段
ノ不盡ヲ以テ前段ノ不盡ヲ除テ逐商シ求ム○
元數ノ一ヲ徑率トシ第一ノ商ヲ周率トス是ヲ
一等ノ弱率トス第二ノ商ヲ以テ一等ノ徑周率
ニ乘シ周率ニ元數ノ一ヲ加テ二等ノ強率トス
第三ノ商ヲ以テ二等ノ徑周率ニ乘シ一等ノ徑
周率ヲ加テ三等ノ弱率トス第四ノ商ヲ以テ三
等ノ徑周率ニ乘シ二等ノ徑周率ヲ加テ四等ノ

图 7.2　《缀术算经》所录建部贤明求圆周率近似值的零约术

令 $q_1 = 1$，$p_1 = a_1$，$q_2 = q_1 a_2$，$p_2 = p_1 a_2 + 1$，$q_k = q_{k-1} a_k + q_{k-2}$，$p_k = p_{k-1} a_k + p_{k-2}$，

由此而得到 π 的渐近分数序列：$\dfrac{p_k}{q_k}$ $(k = 1, 2, 3, \cdots, n)$。

建部贤明的方法具有普遍性。对于实数 α 和 β，若求实数 $\dfrac{\alpha}{\beta}$ 的渐近分数，对其进行辗转相除，得到逐次不完全商 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$，可以记作连分数 $[a_1, a_2, \cdots, a_n]$ 形式，按照法则：

$$\begin{cases} p_1 = a_1 \\ q_1 = 1 \end{cases}, \begin{cases} p_2 = a_1 a_2 + 1 \\ q_2 = a_2 \end{cases}, \begin{cases} p_i = p_{i-1} a_i + p_{i-2} \\ q_i = q_{i-1} a_i + q_{i-2} \end{cases} (i > 2)$$

归算，则有 $\dfrac{p_n}{q_n} = [a_1, a_2, \cdots, a_n]$，且 $\dfrac{p_n}{q_n}$ 逼近实数 $\dfrac{\alpha}{\beta}$，它基于定理 7.5。

尽管和算使用分数记法，但没有连分数记号，不过就逼近算法的演算程序而言，建部贤明的零约术与今日数论中的连分数方法是完全一致的。

7.5　建部贤弘的累约术与重约术

7.5.1　建部贤弘的累约术：实数有理逼近

由于没有实数理论，和算家将整数论中的不定分析与实数有理逼近视为同一，诸约术与同余式组求解的“剪管术”密切相关，其核心算法是解不定方程 $ax-by=1$，关孝和称之为剩一术，建部贤弘将其推广，对任意有理数的 α、β、δ，求使 $\alpha x-\beta y=\delta$ 成立的整数 x、y，称之为累约术，其中 α 叫益数，β 叫损数，δ 叫剩数。其术如下（图 7.3）：

> 累约者，累损益之数也。益数为左，损数为右[带分者，损分母益分子相乘为左，损分子为右，各先两数互减得等数为约法，各约之，而后列于左右也]，以少除多得初商[左多者，得初商而厘余一，则不及求多商，故以一即为剩一之益衰，以初商为损衰；左少者，得次商而余一，则亦以初商即为损衰]，以其余除少，得次商，以次余除初余，得三商，又以三余除次余，得四商，次第如此，以余左右互相除，以左余一者为末商而止。以末第一商[或起于初商，逐至末商者亦同]，即为一积；以乘末第二商，加定一为二积；以之乘末第三商，加定一积为三积；又以之乘末第四商，加定二积为四积；逐以其积乘后商，加前积为后积，至初商，如此得末积。益数多者，以最末积为损，以次末积为益；损数多者，以最末积为益，以次末积为损，各得剩一之衰，以剩数乘益衰，满损数去之，余[有约法者约之，后皆仿此]得益段；以剩数乘损衰，满益数去之，余得损段；以益数乘益段得总数[或以损数乘损段加剩数者亦同]。
>
> 言原数而带分者，以损分母乘原数，满损分子去之，余以减损分子加剩数，而乘益分母乘剩一，益衰得数满益分母损分子相乘数去之，余得益段；又原数益分子去之，余以减益分子乘损分母，如剩数而乘剩一，损衰得数满损分母益分子相乘数去之，余得损段；以益分子乘益段，约益分母，加原数，得总数[1]。

上述术文叙述了有理系数丢番图方程 $\alpha x-\beta y=\delta$ 的连分数解法，首先

[1] 建部賢弘等. 大成算經[M]. 卷六“諸約第五”，東京理科大学藏抄本.

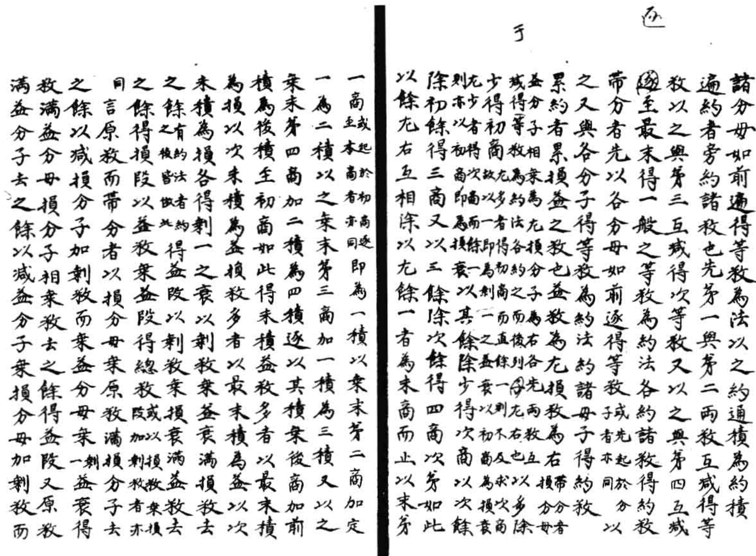

諸分母如前遍得等數為法以之約通積為約積
遍約者旁約諸數也先第一與第二兩數互減得等
數以之與第三互減得次等數又以之與第四互減
遍至最末得一般之等數為約法各約諸數得約數
帶分者先以各分母如前逐得等數或先起於分子者亦同以
之又與各分子得等數為約法約諸母子得約數
累約者累損益之數也益數為左損數為右帶分者損分母
益分子相乘為左損分子為右各先兩數互減得等數為約法各約之而後則一左右也以多除
步得初商……
……其餘除步得次商以次餘
除初餘得三商又以三餘除次餘得四商次第如此
以餘左右互相除以左餘一者為末商而止以末第
一商或起於初商逐至本商者亦同即為一積以乘末第二商加定
一為二積以之乘末第三商加一積為三積又以之
乘末第四商加二積為四積逐以其積乘後商加前
積為後積至初商如此得末積益數多者以最末積
為損以次末積為益損數多者以最末積為益以次
末積為損各得剩一之衰以剩數乘益衰滿損數去
之餘有約法者約之後皆做此得益段以剩數乘損衰滿益數去
之餘得損段以益數乘益段得總數或以損段加剩數者亦
同言原數而帶分者以損分母乘原數滿損分子去
之餘以減損分子加剩數而乘益分母乘一剩益衰得
數滿益分母損分子相乘數去之餘得益段又原數
滿益分子去之餘以減益分子乘損分母加剩數而

图 7.3　建部贤弘等的《大成算经》卷六"诸约第五"

对 α,β 使用辗转相除法得到系列商 $\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$，以及相应的余数系列：$\{r_1, r_2, r_3, \cdots, r_n = 0\}$，归算出 $\dfrac{\alpha}{\beta}$ 的渐近分数序列 $\left\{\dfrac{p_n}{q_n}\right\}$，这样有 $q_{n-1}\beta - p_{n-1}\alpha = 1$，从而 $\begin{cases} x = q_{n-1}\delta \\ y = p_{n-1}\delta \end{cases}$ 是不定方程的特解，该方法实际上与公元 6 世纪印度数学家阿耶波多(476～约 550)的 Kuttaka 完全一致。

上述方程等价于 $\left|\dfrac{\alpha}{\beta} - \dfrac{y}{x}\right| = \varepsilon$。如果将其系数推广到无理数，自然就是求满足 $\left|\dfrac{\alpha}{\beta} - \dfrac{y}{x}\right| < \varepsilon$ 的条件有理逼近问题。在中根元圭删定的《累约补阙》和《累约拾遗》中，已明确出现这样的不等式，建部贤弘的累约术实际是把关孝和一次不定方程求解的"剩一术"与丢番图逼近的"零约术"统一了起来。

7.5.2　建部贤弘的重约术：实数的联立有理逼近

用同分母的一组分数 $\left(\dfrac{p_1}{q}, \dfrac{p_2}{q}, \cdots, \dfrac{p_n}{q}\right)$ 来逼近一组实数 $[\vartheta_1, \vartheta_2, \cdots, \vartheta_{n-1}, \vartheta_n]$，并且使 $\left|\vartheta_i - \dfrac{p_i}{q}\right|$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 同时都很小。这样的数学问题叫实数的联立有理逼近问题，其数理基础在于推广的 Dirichlet 定理：

定理 7.8　设 $\vartheta_1, \vartheta_2, \cdots, \vartheta_n$ 是 n 个实数，$Q>1$ 是一个整数，则存在整数 q 满足不等式组 $|q\vartheta_i| \leqslant Q^{-1}\ (1\leqslant i\leqslant n)$，$0<q<Q^n$。

同时有以下推论：

如果 $\vartheta_1, \vartheta_2, \cdots, \vartheta_n$ 中至少有一个是无理数，则存在无穷多组 $\left(\frac{p_1}{q}, \frac{p_2}{q}, \cdots, \frac{p_n}{q}\right)$ 满足不等式组 $\left|\vartheta_i - \frac{p_i}{q}\right| < \frac{1}{q^{1+\frac{1}{n}}}\ (1\leqslant i\leqslant n)$〔1〕。

建部贤弘对零约术的另一发挥是建立所谓重约术的逼近算法，它实际就是上述联立逼近问题。其术文如下（图 7.4）：

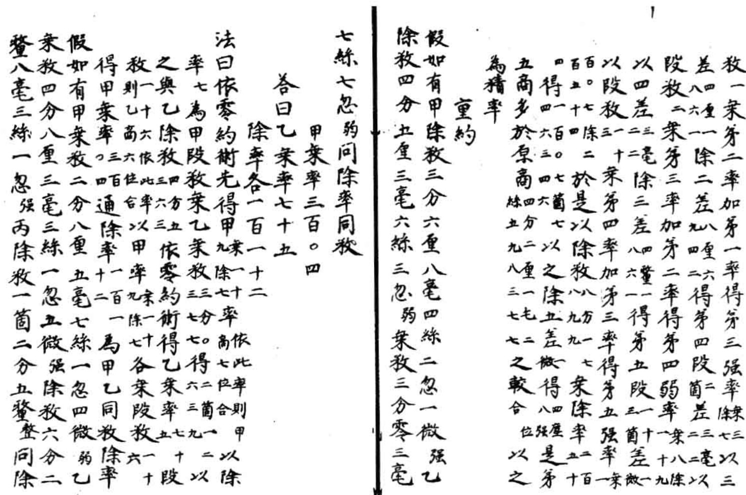


图 7.4　建部贤弘等《大成算经》卷六“诸约第五”

重约者，逐重零约也。先以第一乘除数[或起于末，则依数有率数异者，就近而用之]依零约术得乘除率，求除率同数，以第一除率为段数[逐依零约术所得之除率，皆为其件之段数也]，乘第二乘数[若无乘数者，直用段数也，无除数者，亦准此]，以之与除数依零约术[随第一率商数之合位而作率也，后仿]，得第二乘率及段数，以前第一乘除率各乘段数，得二件通除率及第一乘率，以第三乘数乘通除率，以之与除数依零约术得第三乘率及段数；以前第一、第二乘率与二件通除率各乘段数，得三件通除率及第一、第二乘率，递如此，得诸件同数除率及各乘率。

〔1〕 朱尧辰，王连祥著. 丢番图逼近引论[M]. 北京：科学出版社，1997：45.

求乘率同数者，以第一乘率为段数[逐依零约术所得之乘率皆为段数也]，乘第二除数，以之与乘数依零约术得第二除率及段数，以前第一乘除率各乘段数，得二件通乘率及第一除率，以第三除数乘通乘率，以之与乘数依零约术得第三除率及段数；以前第一、第二各除率与二件通乘率各乘段数，得三件通乘率及第一、第二除率，递如此，得诸件同数乘率及各除率[1]。

下面来看《大成算经》中的一个具体问题：

假如有甲乘数二分八厘五毫七丝一忽四微弱，乙乘数四分八厘三毫三丝一忽五微强，除数六分二厘八毫三丝一忽强，丙除数一个二分五厘整，问除率同数？

法曰：依零约术先得甲率[乘二、除七]，以除率七为甲段数，乘乙乘数[四分八三三一五]，得[三个三八三二〇五]，以之与乙除数[六分二八三一]依零约术得乙乘率[七十]、段数[一十三]，以甲率[乘二、除七]各乘段数[一十三]，得甲乘率[二十六]、甲乙通除率[九十一]，以之即与丙除数[一个二五]依零约术得丙乘率[三百六十四]、段数[五]，以甲乘率[二十六]与乙乘率[七十]及[甲乙]通除率[九十一]各乘段数[五]，得甲乘率[一百三十]、乙乘率[三百五十]、甲乙丙通除率[四百五十五]，为同数除率[2]。

本问是求分别逼近三个实数 $\frac{0.285\,714\cdots}{1}$（甲数），$\frac{0.483\,315\cdots}{0.628\,31\cdots}$（乙数），$\frac{1}{1.25}$（丙数）的一组同分母分数的分母。

建部贤弘首先用零约术求出甲数的渐近分数 $\frac{2}{7}$，继以其分母 7 乘乙数分子，以求 $\frac{7\times 0.483\,315\cdots}{0.628\,31\cdots}$ 的渐近分数 $\frac{70}{13}$，这样通过通分得到甲数渐近分数为 $\frac{2\times 13}{7\times 13}=\frac{26}{91}$，乙数渐近分数为 $\frac{70}{13\times 7}=\frac{70}{91}$；然后再以其公分母 91 乘丙数分子，以求 $\frac{91}{1.25}$ 的渐近分数 $\frac{364}{5}$，并与前面所求甲、乙数渐近分数 $\frac{26}{91}$，

〔1〕 建部賢弘等. 大成算經[M]. 卷六"諸約第五"，東京理科大学藏抄本.
〔2〕 建部賢弘等. 大成算經[M]. 卷六"諸約第五"，東京理科大学藏抄本.

$\frac{70}{91}$进行通分，得甲数渐近分数为$\frac{26\times 5}{91\times 5}=\frac{130}{455}$，乙数渐近分数为$\frac{70\times 5}{91\times 5}=\frac{350}{455}$，丙数渐近分数为$\frac{364}{5\times 91}=\frac{364}{455}$。

因为建部贤弘未指明甲、乙、丙三数中是否包含无理数[1]，所以没有指出联立逼近的唯一性问题。根据上述定理及推论，若甲、乙、丙三数都是有理数，则所求的一组渐近分数是唯一，否则不唯一。而且这里

$$\left|\frac{0.285\,714\cdots}{1}-\frac{130}{455}\right|=\frac{0.000\,13\cdots}{455}=\frac{1}{455\times\frac{10\,000}{1.3\cdots}}=2.85\cdots\times 10^{-7};$$

$$\left|\frac{0.483\,315\cdots}{0.628\,31\cdots}-\frac{350}{455}\right|=\frac{0.000\,175\cdots}{455\times 0.628\,31\cdots}=\frac{1}{455\times\frac{6\,283.1\cdots}{1.75\cdots}}=$$

$6.12\cdots\times 10^{-7}$；$\left|\frac{1}{1.25}-\frac{364}{455}\right|=0$。

建部贤弘的联立逼近方法具有实用性。

7.6　久留岛义太的平方零约术与周期连分数展开

久留岛义太的平方零约术是对和算零约术的进一步发展，它讨论二次无理数（有理数域上二次不可约多项式的根）的连分数展开问题，即对于$\sqrt{x}=\sqrt{l^2+\lambda}\ (0<\lambda<2l+1)$，以求$\sqrt{x}$的渐近分数序列$\left\{\frac{p_i}{q_i}\right\}$。其法见于被认为是久留岛作品的抄本《开方和术》中，另外安岛直圆（1739～1798）《不朽算法》下卷也收录，其法如下：

> 夫平方零约之法者，所以凡平方开之商，命之为分母子也，视其数在一位以上者，直为原积，在已下者，尾位奇则以四乘之，偶则以二十五乘之，进而求一位已上数为原积，得母子而后，用四者倍分母，用二十五者五分母。

---

〔1〕建部贤弘在《大成算经》中已把数分为整数和不尽数，即有限数和无限小数，并进一步把无限小数分为畸数和零数，前者通过代数运算可以还原为有限数，即无限循环小数和代数无理数，后者经过代数运算不能够还原为有限数，即超越无理数等，清晰地表达了实数分类的思想。

置各原积，平方开之[总一位已下，不开之，是此术之一体也]，得商为弱段分子，不满为弱数，常以一为弱段分母，列弱段分子，倍之名原实，以弱数名谓原数；

列原实，以弱数除之，得商为段数[以之乘分母，为弱段分母，以之乘分子，加一个为分子]，不满以减原实，余又为实，以不满乘之，加原数，所得以弱数除之，为强数；

列实，以强数除之，为段数[以之乘分母，加前母为分母，以之乘分子，加前子为分子]，不满，以减原实，余又为实，以不满乘之，加原数，以强数除之，为弱数。逐求之如此〔1〕。

这里把 $\sqrt{x}=\sqrt{l_0^2+\lambda}$ $(\lambda<2l_0+1)$ 中的 x 叫原积，l_0 叫适商，λ 叫原法，又称作甲弱数，$2l_0$ 叫原实，甲分母子 q_1，p_1，其中 $q_1=1$，$p_1=l_0$，$b_1=\lambda$，$a_1=2l_0$，并且作辗转除法

$$\frac{a_k}{b_k}=l_k+\frac{r_k}{b_k}\ (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

其中：$a_k=a_1-r_{k-1}$，$b_k=\dfrac{a_k r_{k-1}+\lambda}{b_{k-1}}$ $(k=2,\ 3,\ \cdots)$

作归算 $q_k=l_{k-1}q_{k-1}+q_{k-2}$，$p_k=l_{k-1}p_{k-1}+p_{k-2}(q_0=0,\ p_0=1)$，

则 $\dfrac{p_k}{q_k}$ 为 $\sqrt{x}$ 的渐近分数序列。

从 $x-l_0^2=\lambda$ 出发，逐步进行代数变形，容易证明久留岛的上述结论。事实上，久留岛算法是在对 $\sqrt{x}$ 进行连分数展开，即 $\sqrt{x}=[l_0.\ l_1l_2\cdots l_k\cdots]$，其中 $\dfrac{p_k}{q_k}=[l_0.\ l_1l_2\cdots l_k]$。

二次无理数的有理逼近基于上述定理 7.6 与定理 7.7。

久留岛义太没有指出他的连分数展开具有周期性，但就逼近算法而言十分实用。安岛直圆撰“平方零约解”，把 $\sqrt{x}$ 化成无限小数，再用零约术把小数化为分数，归结于一般性的零约术，同样也没有认识到连分数展开的周

〔1〕 久留岛義太. 開方和術[M]. 日本学士院图书馆藏抄本.

期性。

7.7 和算丢番图逼近算法的中算源流

和算丢番图逼近算法与中算有着深刻联系。和算零约术与中算“通其率”及调日法如出一辙，那么自然存在这样的疑问：中日算法有无直接承传关系？为解明这一问题，首先需要考察关孝和的工作与何承天《元嘉历》、祖冲之《缀术》以及秦九韶《数书九章》等中国古代历算书籍有无直接关系。据日本史书记载，《元嘉历》曾传入日本，并于公元692年在日颁行，计行5年，千余年后关氏是否研究过该历，不得而知。在求圆周率方面他使用加速法（增约术）和零约术，使今人很自然地联想到祖冲之相应工作，从而又产生这样的疑问：《九章算术》割圆术中的“以十二觚幂为率消息”的加速法是否为祖冲之所作[1]？祖氏约率$\frac{22}{7}$，密率$\frac{355}{113}$是否也得自调日法？或者说祖冲之是否也使用关孝和那样的和内插方法？尽管今天我们无法获知《缀术》内容，但人们宁愿作这样的推测。《缀术》传播日本较久，甚至至幕末仍有该书存在的传言[2]，从而关孝和与《缀术》的关系一直颇受中日数学史界所关注。

《缀术》在日失传时间不可考，建部贤弘在《缀术算经》（图7.5）中曾经议论到：

> 隋书：古之九数圆周率三、径率一，其术疏舛，自刘歆、张衡、刘徽、王蕃、皮延宗之徒，各设新率，未臻折衷，宋南徐州从事史祖冲之，更开密法，以圆径一亿为一丈，圆周盈数三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒七忽，朒数三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒六忽，正数在盈朒二限之间，密率圆径一百一十三，圆周三百五十五，约率圆径七，圆周二十二。尝关氏碎抹圆求定周，以零约术造径周率，尔后历二十余年睹《隋志》，有周数率数咸邂逅符合者，咨祖子也、关子也，虽异邦殊时，理会真理相同，可谓妙也[3]。

---

〔1〕详细内容请参见本书第9章。
〔2〕三上義夫. 関孝和の業績と京阪算家並に支那の算法との関係及び比較[J]. 東洋學報，1932(22).
〔3〕建部賢弘. 綴術算經[M]. 第十一“探圓數”，内閣文庫本.

故ニ真數ヲ求ムヘキ程限ヲ料テ別ニ簡易ノ
假術ヲ探設テ用之又求數ノ如ハ真術ニ依テ
微芒ノ數ヲ極ルヿヲ不要純尾位ヲ究ムヘキ
多寡ノ位數ヲ料テ別ニ假術ヲ設テ數ノ不繁
ヲ索テ用之其零約ノ數ニ於テモ如此真率ヲ
不取シテ閒率ヲ用ルヿ有也
隋書古之九數圓周率三徑率一其術踈舛自劉
歆張衡劉徽王蕃皮延宗之徒各設新率未臻折
衷宋南徐州從事史祖冲之更開密法以圓徑一
億爲一丈圓周盈數三丈一尺四寸一分五釐九
毫二秒七忽朒數三丈一尺四寸一分五釐九毫
二秒六忽正數在盈朒二限之間密率圓徑一百
一十三圓周三百五十五約率圓徑七圓周二十
二ト葦關氏圓ヲ碎抹シテ定周ヲ求メ零約ノ
術ヲ以テ徑周ノ率ヲ造レリ爾シヨリ後二十
餘年ヲ歷テ隋志ヲ覩ルニ周數率數咸邂逅ニ
符合スル者有リ沓祖子也關子也邦ヲ異ニシ
時ヲ殊ニスト雖真理ニ會スルヿ相同シ可謂
玅ナリト
右圓ノ數碎抹ノ術ヲ以テ截周冪ヲ求ルハ理ニ

图 7.5　建部贤弘《缀术算经》的“探圆数”

从建部贤弘的这段叙述来看，可以认定，不仅建部贤弘本人，就连关孝和也没有见到过祖冲之的《缀术》，因而自然可以排除关氏工作直接继承《缀术》的可能性。

笔者以为，和算丢番图逼近算法还存在中国历法文献的来源。1685 年以前，日本一直采用中国历法，中国历学著作一直不断地、及时地传入日本，同时由于日本统治者的重视，一直保存较好。杰出的和算家如关孝和、建部贤弘兄弟、中根元圭(1662～1733)、松永良弼(? ～1744)、安岛直圆(1739～1798)等人都精通历学。对于以零约术求圆周率问题，建部贤弘在《缀术算经》中谈到：

> 更又如历算法以朔余分调日法，不逐求究尽精密之数，唯要调到秒位之尾，故或以一等、二等强弱之率；或用二等、三等；或三等、四等强弱之率逐累加，求位数不多间率数件，料宜取用也[1]。

表明他十分熟悉中国历算中的调日法。

中根元圭《天文图解发挥》(1739)中之“楪奇求源术”即推演上元积年算法，其术曰：

> 依冬至大小余和天正朔大小余推积年，称作楪奇求源术。其术先

〔1〕 建部賢弘. 綴術算經[M]. 第十一“探圓數”. 内閣文庫本。

置冬至大小余，依通分内子法得数，以七百零五约，以定率一千四百六十三乘，寄左。别冬至大小余通分内子者，内减天正朔大小余通分内子者，不及减，加勾周五万五千四百而减之，余以一千四百六十一约，以定率一千三百六十乘，加入寄左，得数满元法一千五百二十，得积年[1]。

(使用《三统历》数据，日法940，纪法1461)

他的另一部著作《推演算法》专论上元积年的推算，其目有：求假积年；求定积年；直求定积年；求纪首日建；求上元岁建；求纪首在甲子法；直求纪首在甲子法；求上元在甲子法；求上元纪首俱在甲子法。

这些史实表明，和算家对中国历算内容持有兴趣，由此而不难想象关孝和、建部贤弘等人了解调日法、演纪术之类的中算内容。其中《隋书律历志》和《授时历》对和算影响最为明显，前者关于祖冲之圆周率的记叙刺激了关孝和、建部贤弘等人的圆理研究，甚至建部贤弘对自己的数学著作《缀术算经》之书名及其他发明的数学方法的命名，也因读了这段文字而受启发。他在该书的序言中写道：

按《隋史》，祖冲之所著之书，名为《缀术》，学官莫能究其深奥，是故废而不理。吾适采彼"缀"之一字，至熟思。冲之可谓上古达人也，盖其玄妙真理，听不可识、思不可得者乎？[2]

可见他对祖冲之《缀术》的景仰。

数学传播史和比较数学史研究中，经常遇到两种文明中存在相同或相似的数学内容和数学方法的现象，在如何看待其相似性上，数学史界流行的做法常常一概认定是传播所致。数学史上的确充满许多因数学传播交流而带来的数学思想方法上的进步和变革的事例，然而也应当承认，在一定的历史条件下，人类在数学认识上具有一致性，而且数学交流中，传播与影响的方式存在多样性，影响的程度也存在层次性。如果不认真检讨传播、影响的方式和层次性，就不能客观、公正地评价历史上某一个地区的数学成就。

由于文化上的渊源关系，历史上中日数学的交流和传播一直延续着，毋庸置疑，中算是和算的学术源泉，从而在中日数学史上一致性的数学内容和

---

〔1〕 中根元圭．天文図解発揮[M]，转引自学士院編．明治前日本数学史[M]．第三卷．東京：岩波書店，1957：93.

〔2〕 建部賢弘．綴術算經[M]，第十一"探圓數"，内閣文庫本.

数学方法很多。今天要想甄别和算中一些数学方法哪些是对中算的直接继承，哪些是和算家自己的创造，十分困难。笔者认为，在两个文明中，当数学家要解决同样的"数学问题"时，如果他们采用同样的"数学工具"，而且具有同样的"数学思维方式"，甚至使用相同的"数学语言"，那么他们一定可以获得相同的数学成果。就和算丢番图逼近算法而论，和算家要解决的问题是如何求无理数的近似分数问题和同余问题，问题来源于中国历法问题、祖冲之造约率与密率问题，以及杨辉的剪管术。在中算体系中，处理这些问题的基本方法是整数论算法，它们同样是和算不定算法的基础。和算家正是运用中算整数论的数学工具，重新研究了中算中的零约、剪管等问题，从而获得与中算一致的结果，并有所发展，和算家不仅采用了和内插和连分数两种基本方法处理实数的有理逼近问题，而且还涉及二次无理数的有理逼近与实数的联立有理逼近问题。

第 8 章

极值算法：极数术*

M. Kline 认为，17 世纪微积分的产生有四方面学术背景对其有促进作用，即

① 求运动体瞬时速度与瞬时加速度；

② 求曲线的切线问题；

③ 求函数的最大值、最小值问题；

④ 求曲线长、曲面形体的面积与体积，以及重心问题[1]。

当人们在思考东西方近代数学乃至科学所出现的反差时，往往以微积分概念与方法的形成作为主要考察对象，并机械地以上述背景为参照，考察中算传统中的相应情况，以期寻找对上述疑问的解释。

一般认为，中国传统科学中并未形成近代科学意义上的自然科学，运动学、力学等方面的知识十分贫弱，因而缺乏第①，②两方面的学术背景，而在几何求积方面，刘徽割圆术、阳马术乃至祖暅原理等杰出成就足以说明，第④方面背景比诸希腊传统的西方有过之而无不及。至于第③方面背景，普遍认为中算没有极值概念与方法，从而存在这样的观点，中算缺少①，②，③三方面的背景，对微积分方法的形成是不利的。然而和算极值方法的发达为我们对中算的这方面认识提供一个新视角。本章分析和算极值方法形成

---

* 本章主要内容曾发表于《自然辩证法通讯》，2001，18(3)：2－21.

〔1〕 M·克莱因. 古今数学思想[M]. 第二册. 上海：上海科技出版社，1979：49.

的思想脉络及其中算背景，由此来思考东方数学中的变量数学萌芽问题。

8.1 建部贤弘的极数术与久留岛的极数 15 问

和算极值方法初见于关流算家建部贤弘的《缀术算经》(1722)，该书是一部阐述数学研究中如何使用归纳法的著作，其中第六“探直堡求极积术”讨论的是用归纳法求多项式稳定点与极值的问题，原题如下：

假如有直堡长阔差七尺，阔高和八尺，欲使积至多，问长阔高及极积各几何？

答曰：阔四尺三分尺之一，长一十一尺三分尺之一，高三尺三分尺之一，积一百八十一尺二十七分尺之一十三。

立天元一为阔，加差为长，亦以阔减和为高，长阔高相乘为积，以之为元式，探其术意，若题中云积数时，则以积数与元式相消，止于积数即实级，其实级极多者，以开尽方级为限，故即以所立阔为商，用元式依开出商数之法，以求方级极限[1]。

如果设长方体(直堡)的阔为 x，那么长方体体积函数(原式)为

$$f(x) = x(x+7)(8-x) \tag{8.1}$$

问题是求函数 $f(x)$的极大值。

建部贤弘首先以积数 $f(x)$与原式 $x(x+7)(8-x)$相消，得开方式：$-f(x)+x(x+7)(8-x)=0$，然后按照和算方程论中的“适尽方级法”求稳定点。

其所谓“适尽方级法”等价于 $f'(x)=0$，从而形式上与现代微分学中求函数稳定点的 Fermat 方法一致。

《缀术算经》此问仅是一孤立算例，不久，久留岛义太(？～1757)对极值问题进行专题研究，使之成为和算的一个分支内容。抄本《久留岛先生极数十五问》在建部贤弘求多项式函数极值的基础上，进一步讨论了有理分式函数的极值问题。《久氏遗稿·地之卷》也给出 24 个极数术问题，其中第一、

---

〔1〕 建部贤弘. 缀术算经[M]. 第六. 探直堡极积术. 内阁文库藏抄本，23581 号.

二、三问与前者的第一、二、三问相同，第四、六问与前者的第十四问相同，第五问与前者的第七问相同，第七问与前者的第十五问相同，第八问与前者的第十二问相同，第九问、第十问、第十一问等3问是前者中所没有的。如第十一问，求函数

$$y = f(x) = \frac{7\,649x - 2\,091x^2 + 17x^3}{17 + 3x} \tag{8.2}$$

的极值。久留岛首先将其化为具有隐函数形式的开方式

$$F(x, y) = -y(17 + 3x) + 7\,649x - 2\,091x^2 + 17x^3 = 0 \tag{8.3}$$

然后按建部贤弘方法求 $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$，即首先求出

$$-3y + 7\,649 - 4\,182x + 51x^2 = 0$$

然后与 $F(x, y) = -y(17 + 3x) + 7\,649x - 2\,091x^2 + 17x^3 = 0$ 联立，消去 y，得到 x 的方程，解出零点 $x_1 = 61$，$x_2 = 11$，前者叫凹限，后者叫凸限，分别作为极大值与极小值的稳定点。这样的演算，不仅与今日微分方法相似，而且与今日所谓的函数凹凸性概念相似。当然和算中没有函数曲线的概念，久留岛的凹凸称谓可能是通过数值试验结果而给出形象的命名（实际上存在三个稳定点：$x_1 = 61$，$x_2 = 11$，$x_3 = -19$，后者 $x_3 = -19$ 非极值点）。

久留岛对极值研究的另一贡献，则是成功地解决了求超越函数的极值问题。在本书第2章已述，久留岛的好友松永良弼（？～1744）曾向他提出如何求弓形弧长 p 与矢 h 的比值 p/h 的极值问题。久留岛成功地解答了这一问题，他首先将矢 h 展成 p^2 的幂级数：

$$16dh = 4\left(p^2 - \frac{p^4}{3 \cdot 4d^2} + \frac{p^6}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6d^4} - \frac{p^8}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8d^6} + \cdots\right) \tag{8.4}$$

$$\begin{aligned} F(x, y) &= -16\left(\frac{p}{d}\right)\left(\frac{h}{p}\right) + 8\left[\frac{1}{2!}\left(\frac{p}{d}\right)^2 - \frac{1}{4!}\left(\frac{p}{d}\right)^4 + \frac{1}{6!}\left(\frac{p}{d}\right)^6 - \cdots\right] \\ &= -16xy + 8\left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \frac{x^8}{8!} + \cdots\right) = 0 \end{aligned}$$

然后按适尽方级法求 $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$，并与 $F(x, y) = 0$ 联立以消去 y，得到超越方

程式

$$4-x^2+\frac{x^4}{3\cdot 6}-\frac{x^6}{3\cdot 5\cdot 6\cdot 8}+\frac{x^8}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 6\cdot 8\cdot 10}-\cdots=0 \quad (8.5)$$

于是,求稳定点问题归结为求此超越方程的实数解问题。久留岛给出了关孝和- Newton 迭代法与级数反演法两种求解方法,从而解决了超越函数的极值问题。

在没有实数理论的情况下,和算家是将无穷幂数展开式视为特殊的多项式,因此,久留岛方法是建部贤弘极值方法的延伸,按今天的极值理论来衡量是很不成熟的。

久留岛之后,极数术成为和算的重要内容之一,这方面的著述不绝,但其理论与方法没有出现进一步的发展。

8.2 中国传统历算中的极值概念萌芽

关于《缀术算经》极数术的造术,建部贤弘在术文之下有一段说明文字:

> 曩或授时历求月离迟疾差用立平定三差者,有问求其损益极限数之术,吾不为察理则碎类数,乍探得实一方二廉三数而会其术[其探数略之],尔后,又变题辞,造此问直堡极积[1]。

他明确指出,其极数术创意来源于郭守敬的招差法求月离迟疾问题。

众所周知,月亮运动是具有周期性的椭圆运动,其运动呈对称状态:

近地点(最快点) →减速→ 近远地点中点(平均速度) →减速→ 远地点(最慢点) →增速→ 远近地点中点(平均速度) →增速→ 近地点(最快点)

理论上中心差函数为 $\delta_0 = f - l = 2e\sin l + 1.25e^2\sin 2l + \cdots$($f$ 为真近点角,l 为平近点角,e 为轨道偏心率)。当 $l=\pi/2$ 时,函数存在最大值 $\delta_{\max}=2e$,平均最大值为 $\delta_{\max}=2\times\frac{1}{18}=6°.366\ 20$,中国古历常取 $\delta_{\max}=5.5$(古度)$=5°.42$。

郭守敬以招差法构造了月亮中心差的三次多项式函数:

---

〔1〕 建部賢弘. 綴術算經[M]. 第六. 探直堡求極積術. 内閣文庫藏抄本. 23581 号.

$$m(x) = [1\,111\,000 - (2\,810 + 325x)x]x \div 10^7$$
$$= 0.111\,1x - 0.000\,281x^2 - 0.000\,003\,25x^3 \quad (0 < x < 84)$$

当 $x \approx 84.307\,7$ 时，$m(x)$ 有极大值。而郭守敬三差函数的定义域是 $0 < x < 84$，建部贤弘可能从月离表上发现迟疾度数值递增、递减呈对称变化的规律，直观地看出在 $x = 84$ 附近存在最大值。他说："吾不为察理则碎类数，乍探得实一方二廉三之数而会其术"，所谓"乍探得实一方二廉三之数"的"乍"字，反映了他的求稳定点算法的思想并非直接来源于关孝和的适尽方级法，"探得实一方二廉三之数"纯属偶然。这里的"碎类数"即指逐次试验法，通过数值试验归纳出稳定点求法与适尽方级法一致的规律而"会其术"，这也是他之所以将"探直堡求极积术"作为"缀术"方法之一例的缘由。

《授时历》与极值有关的另一问题是白道交周问题。历算中常常需要确定月亮在赤道坐标系中的位置，或由观测的月亮赤道坐标位置推算月亮在白道上的运动状态，必须确定白道在赤道中的位置。而白道具有不稳定性，黄白交点沿黄道由东向西不断移动，同样与赤道交点也是游离不定的，于是白赤道交点与固定的黄赤道交点(冬至，夏至点)的距离就是一变量(限数)，当黄白交点处于冬至夏至点时，这种距离达到极限值，郭守敬称之为"白赤道正交距黄赤道正交极数"，简称"极数"。利用极数与限数便可以求出白道与赤道的交角，求出该交角就可以进行白道坐标与赤道坐标的变换，从而确定白道在赤道坐标系下的位置。

如图 8.1 所示，A 为夏至点，B 为秋分点，$\widehat{AB}$ 为黄道，$\widehat{AC_0}$ 为白道，$\widehat{BD}$ 为赤道，E_0 为白道与赤道的交点，$\widehat{BE_0}$ 为"极数"。《授时历》采用球面投影，将天球投影到与黄道面和赤道面都垂直的平面(图 8.1 中的 xOz 平面)上，将立体图形平面处理，正投影图如图 8.2 所示，$\widehat{ACA'}$ 为白道投影，其本应为椭圆，而《授时历》将其视为圆弧进行处理，其圆心为 P，现在要求白道与赤道的交点 E_0 点。已知：周天 365.25 度，$\pi = 3$，黄赤道交角 $\varepsilon = 23$ 度 90 分(即 $\widehat{AD}$)，黄白道交角 $\mu = 6$ 度(即 $\widehat{C_0B}$)，CO 近似取 6 度。

首先计算出大圆直径 $d = 2CP$。因为，$PC = PA$，在直角 $\triangle AOP$ 中，根据射影定理，有 $AO^2 = OC(PO + PC)$，则可求出 $PO + PC = AO^2/OC$。

图 8.1

图 8.2

其次用天元术求 FE，设 $FE = x$，则

$$MC = 6 - x$$

$$d - MC = 623.62 - (6 - x) = 617.62 + x$$

$$(OF)^2 = (EM)^2 = (d - MC)MC = (617.62 + x)(6 - x) \quad (8.6)$$

$$\frac{OG}{DG} = \frac{56.065}{23.71} = 2.37$$

$$OF = EM = \frac{OG}{DG} \cdot FE = 2.37x$$

$$OF^2 = (2.37x)^2 = 5.6169x^2$$

与式(8.6)相减，得开方式

$$-6.6169x^2 - 611.62x + 3705.72 = 0$$

解得 $x = 5.7$，即 $FE = 5.7$。

接下来求 $\widehat{BE_0}$：

$$OF = EM = \frac{OG}{DG} \cdot FE = 2.37x = 13.4782$$

$$OG : OF = GD : FE = OD : OE$$

所以 $EO = \dfrac{OD}{DG} \cdot FE = 14.63$，即 $E_0H = EO = 14.63$

又已知圆直径为 $2r = 121.75$，弓形半弦 $EO = 14.63$，对应的矢 $h = r -$

$\sqrt{r-EO^2}=1.78$，根据沈括的会圆术公式，求得对应的半弧为

$$EO+\frac{h^2}{2r}=14.63+0.026\approx 14.66$$

于是，正交极数 $\widehat{BE_0}=14.66$。

以上是关孝和在《授时发明》中，根据《天文大成管窥辑要》的记载所阐述复原的郭守敬用天元术求正交极数的方法，其诠释工作弥补了《明史》的不足与黄宗羲的缺陷[1]。根据这一情况，有理由认为，关孝和的极数概念可能来源于《授时历》白道交周中的极数概念。

“极”是汉语中经常使用的一个概念，意义较广，主要有“至”、“至高”、“尽头”、“穷尽”、“边际”等意思，它既表示变化过程，也表示变化结果，还表示边界点。在和算中，“极数”概念有三种含义：① 方程论中的极数指方程等根；② 增约术与无穷级数中的极数指级数和，即极限值；③ 极数术中的极数指函数最大值与最小值。

本章小结

和算“极数”概念的形成，清楚地表明，中国算学传统中存在着极大、极小值概念的萌芽，这些思想被和算家所接受并加以发挥。

在西方，极值概念的产生也存在两方面的背景，一是可上溯至古希腊的关于行星运动中心差问题，另则是 1615 年 Kepler《测量酒桶体积的新科学》中有关球内接六面体的最大体积问题。Kepler 采用与建部贤弘“碎类数”一样的方法，一次一次地选择特殊情形作试验，以寻找最大值存在的规律。由此可见，在一些数学思想、概念的形成上东西方存在一致性。

西方极值理论的进一步发展与解析几何、微分概念、函数概念的形成密不可分。16 世纪，运动研究成为自然科学的中心问题，导致数学中产生了变量和函数概念而改变了整个数学面貌。变量和函数概念的形成过程中，Fermat 与 Descartes 的解析几何思想起着决定性的作用。在希腊数学传统中，形与数是相互分离的数学对象，Fermat 和 Descartes 继承了古希腊的数学传统，Descartes

[1] 薄树人.《授时历》中的白道交周问题[A]. 科学史集刊(第五集)[C]. 北京：科学出版社，1963：55.

的方法论驱使他希望将算术方法引入几何研究，使形与数得到统一；希腊时代以运动定义曲线的传统为 Fermat 所发展，其坐标与曲线方程的思想实际是对 Apollonius 曲线轨迹观念的继承。因此，近代解析几何中的形与数是抽象的，两者的统一是在希腊传统的基础上更高层次的统一。此外，推动近代变量数学的建立的另一个根本原因是，西方数学家希望建立一种能够解决一切问题的方法（数学机械化），具有方法论的指导，因此，他们的数学研究具有普遍意义。这样就决定了 Fermat 极值法具有以下三个特点：

① 利用无穷小增量，决定了极值算法与微积分学的联系；

② 与求切线方法一致，两者的统一对微积分理论的形成具有重要意义；

③ 方法是普遍的，可以解决任意解析函数的极值问题。

就微积分学的背景而言，东方数学中存在着几何求积的无穷小分析和极限方法，特别是和算家更加明确地提出了极限的概念（和算家已使用“极限”一词），在圆理研究中从建部贤弘的零约极限法，到松永良弼的代数极限法，极限方法得到普遍应用，这一概念在和算后期更为清晰，例如，《求积通考》称：“极有多少二数，多极谓多而无量遂至极，譬如圆几何大也，不失圆规之理，然至多极其圆周则成一直线，因而多极虽有形而不能量之，故为虚。少极谓少而无量遂至极，至少极视则无形，取则无像，故少极为空”，并分“有量之极”与“无量之极”（意即无穷大和无穷小）。这些观点与方法并不逊色于 17 世纪的欧洲数学。不仅于此，东方数学中也存在着求函数极值的变量数学背景，尽管和算家的极数术中没有使用无穷小方法。

至于东方数学中的是否出现变量观念与概念，一直为数学史界所忽视，甚至被否定。事实上，无论是出于什么样的背景，在汉字圈数学传统中同样也会碰到变量数学问题。和算家建部贤弘在《大成算经》中关于“象形”、“满干”和“数”的议论，讨论了数学对象的各种变化规律，他所谓的“象”和“形”的“满”、“干”变化（象形，即数学对象，象主要是代数方面的问题，形主要是几何方面的问题；满即增加变化，干即减少变化），以及“数”的“动”、“静”变化，已经涉及常量与变量问题[1]。

---

〔1〕 徐泽林. 建部贤弘的数学认识论——论《大成算经》中的“三要”[J]. 自然科学史研究，2002，21(3)：232－243.

另一方面，从中国古代几何的方法来说，主要是计算几何，强调数与形的统一，它是解析几何思想的先声，这种计算几何的传统在和算中也获得了进一步的发展。

既然和算中出现了上述数形统一观、变量观念、求积极限法与极值方法，那么为什么没有发展出解析几何、函数概念以及微积分学呢？

中算与和算的研究模式中，设计应用问题是最基本内容之一，建部贤弘对变量的引入是通过对问题条件的改造而展开的，因此，他的“满”、“干”、“动”、“静”等变量概念的意义非常狭窄，缺乏建立普遍方法的动力，必然不利于函数概念的建立。

建部贤弘的极数术并没有利用无穷小增量与极限法，其求稳定点的导函数方法完全是形式上的偶合。这里需要指出，建部贤弘在求球表面积时所使用的方法实际上是微分法，可惜未能形成微分概念而进一步发展，其结果导致和算在无穷小分析上出现积分法发达，微分法贫弱的不平衡状况，这是和算圆理与极值方法未能进一步发展的一个因素；另一方面，以算法为中心的数学模式造成数学概念与方法的普遍性与抽象性的薄弱，而没有形成解析几何方法与函数概念，缺乏分析学的数理基础，因此，建部贤的极值数术也仅限于多项式函数而具有特殊性。这些局限性决定了和算极值算法不可能理论化以向微积分道路迈进。

当然，仅从数学科学内部寻找东方数学没有形成变量数学的原因并不合适，它还涉及东西方文化传统的差异与社会因素，仅从内史角度或仅从外史角度探讨这一复杂的历史问题，都会失之偏颇。

第 9 章

数值加速逼近算法：累遍增约术与 Romberg 算法*

曲线计算是和算中的一个最基本问题，和算家的很多精力与智慧都集中于此，因此创造出一些非常有效并且十分科学的数值逼近算法，建部贤弘创立的累遍增约术便是其中最精彩的算法，它实际上就是今天数值积分中常用的 Richardson 外推法。本章介绍建部贤弘《缀术算经》中以累遍增约术求圆周率的数值逼近方法，分析其数学原理，并论证其与数值积分中 Romberg 算法是一致的，进而追溯其算法思想的中算源流。

9.1 关于 Richardson 外推法与 Romberg 算法

设数值 T_0 由下列收敛级数给出：$T(x) = T_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \cdots$ 这里：A_k 是与 x 无关的常数，A_kx^k 是误差项。

当 $x = x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ 时，得到 T_0 的初始近似值序列：

$$\begin{aligned} T_i^{(0)} &= T(x_i) = T_0 + A_1x_i + A_2x_i^2 + A_3x_i^3 + \cdots \\ &= T_0 + o(x_i)\ (i = 1, 2, 3, \cdots, n) \end{aligned}$$

为了提高近似值序列 $\{T_i^{(0)}\}$ 的收敛速度，消去第一误差项 A_1x，对

---

* 本章内容曾发表于《自然科学史研究》，1998，17(3)：240－249.

$\{T_i^{(0)}\}$ 作下述外推：

$$T_i^{(0)} = T(x_i) = T_0 + A_1 x_i + A_2 x_i^2 + A_3 x_i^3 + \cdots \tag{1}$$

$$T_{i+1}^{(0)} = T(x_{i+1}) = T_0 + A_1 x_{i+1} + A_2 x_{i+1}^2 + A_3 x_{i+1}^3 + \cdots \tag{2}$$

$(2)\times x_i-(1)\times x_{i+1}$ 并除以 $x_i - x_{i+1}$ 得

$$\frac{x_i T_{i+1}^{(0)} - x_{i+1} T_i^{(0)}}{x_i - x_{i+1}} = T_0 - A_2 x_i x_{i+1} - A_3 x_i x_{i+1}(x_i + x_{i+1}) + \cdots$$

即令 $\dfrac{x_i T_{i+1}^{(0)} - x_{i+1} T_i^{(0)}}{x_i - x_{i+1}} = T_i^{(1)}$ 为第一外推公式，于是

$$\begin{aligned} T_i^{(1)} &= T_0 - A_2 x_i x_{i+1} - A_3 x_i x_{i+1}(x_i + x_{i+1}) + \cdots \\ &= T_0 + o(x_i x_{i+1})\ (i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1) \end{aligned}$$

显然 $\{T_i^{(1)}\}$ 比 $\{T_i^{(0)}\}$ 收敛得快。

为了再提高 $\{T_i^{(1)}\}$ 的收敛速度，消去第二误差项 A_2x^2，则对 $\{T_i^{(1)}\}$ 进行外推：

$$T_i^{(1)} = T_0 - A_2 x_i x_{i+1} - A_3 x_i x_{i+1}(x_i + x_{i+1}) + \cdots \tag{3}$$

$$T_{i+1}^{(1)} = T_0 - A_2 x_{i+1} x_{i+2} - A_3 x_{i+1} x_{i+2}(x_{i+1} + x_{i+2}) + \cdots \tag{4}$$

$(4)\times x_i-(3)\times x_{i+2}$ 并除以 $x_i - x_{i+2}$ 得

$$\frac{x_i T_{i+1}^{(1)} - x_{i+2} T_i^{(1)}}{x_i - x_{i+2}} = T_0 + A_3 x_i x_{i+1} x_{i+2} + A_4 x_i x_{i+1} x_{i+2}(x_i + x_{i+1} + x_{i+2}) + \cdots$$

即令 $\dfrac{x_i T_{i+1}^{(1)} - x_{i+2} T_i^{(1)}}{x_i - x_{i+2}} = T_i^{(2)}$ 为第二外推公式，于是

$$\begin{aligned} T_i^{(2)} &= T_0 + A_3 x_i x_{i+1} x_{i+2} + A_4 x_i x_{i+1} x_{i+2}(x_i + x_{i+1} + x_{i+2}) + \cdots \\ &= T_0 + o(x_i x_{i+1} x_{i+2})\ (i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-2) \end{aligned}$$

那么 $\{T_i^{(2)}\}$ 比 $\{T_i^{(1)}\}$ 收敛得快。

逐如此下去，依次消去误差项 $A_k x^k$，使近似值序列 $\{T_i^{(k)}\}$ 的收敛速度不断提高。一般地，第 m 次外推公式为

$$\begin{aligned} T_i^{(m)} &= \frac{x_i T_{i+1}^{(m-1)} - x_{i+m} T_i^{(m-1)}}{x_i - x_{i+m}} \\ &= T_0 + o(x_i x_{i+1} \cdots x_{i+m}) \end{aligned} \tag{9.1}$$

特别地,当 $k=2t-1$ $(t=1, 2, 3, \cdots)$ 时,$A_k=0$, 即 $T(x)$仅含偶次幂项,且 $x_i=2x_{i+1}$ 时, 式(9.1)便为逐次分半逼近:

$$T_i^{(m)}=\frac{x_i^2 T_{i+1}^{(m-1)}-x_{i+m}^2 T_i^{(m-1)}}{x_i^2-x_{i+m}^2}$$

$$=\frac{T_{i+1}^{(m-1)}-\frac{1}{4^m}T_i^{(m-1)}}{1-\frac{1}{4^m}}=\frac{4^m T_{i+1}^{(m-1)}-T_i^{(m-1)}}{4^m-1} \tag{9.2}$$

在数值积分中,对于积分函数 $I=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, 梯形公式误差项为

$$I-I_n=\frac{d_2^{(0)}}{n^2}+\frac{d_4^{(0)}}{n^4}+\cdots+\frac{d_{2m}^{(0)}}{n^{2m}}+F_{n,m} \tag{9.3}$$

其中: $$F_{n,m}=\frac{(b-a)^{2m+2}}{(2m+2)!n^{2m+2}}\int_a^b \bar{B}\left(\frac{x-a}{h}\right)f^{(2m+2)}(x)\mathrm{d}x$$

$$d_{2j}^{(0)}=\frac{B_{2j}}{(2j)!}(b-a)^{2j}[f^{(2j-1)}(b)-f^{(2j-1)}(a)]$$

$B_j(x)$ 是 Bernoulli 多项式, $\bar{B}_j(x)=\begin{cases}B_j(x) & (0\leqslant x<1)\\ \bar{B}_j(x-1) & (x\geqslant 1)\end{cases}$

在 $n=2^k$ 的情况下,对式(9.3)进行 Richardson 外推,即可得逐次外推递推式(9.2)。由复合梯形公式外推一次得到 Simpson 公式,外推两次便得到 Newton-Cotes 公式,继续外推便是 Romberg 算法,即逐次半分加速法[1] Romberg 算法外推数值表如表 9.1。

在上述自动逼近过程中,外推公式是由 $T(x)$决定的, 而且与 x_i的取值结构有关。这种机械的算法, 本质上是从低阶到高阶逐步消去误差项,使近似值序列 $\{T_i^{(m)}\}$ 收敛速度不断增高,直到绝对误差 $|T_i^{(m)}-T_0|=o(x_i x_{i+1}\cdots x_{i+m})\leqslant\varepsilon$ (ε 为事先要求的误差限)时,程序停止,从而大大地减少了计算量,快速得到高精度近似值。

---

〔1〕 Kendall E. Atkinson, An Introduction to Numerical Analysis[M], John Wiley & Sons,1978. 中文本见:匡蛟勋,王国荣等译. 数值分析引论[M]. 上海:上海科学技术出版社,1986:224.

表 9.1　Romberg 算法外推表

$T_i^{(0)}$	$T_i^{(1)}$	$T_i^{(2)}$	$T_i^{(3)}$	…	$T_i^{(m-2)}$	$T_i^{(m-1)}$	$T_i^{(m)}$
$T_1^{(0)}$							
$T_2^{(0)}$	$T_1^{(1)}$						
$T_3^{(0)}$	$T_2^{(1)}$	$T_1^{(2)}$					
$T_4^{(0)}$	$T_3^{(1)}$	$T_2^{(2)}$	$T_1^{(3)}$				
$T_5^{(0)}$	$T_4^{(1)}$	$T_3^{(2)}$	$T_2^{(3)}$	…			
$T_6^{(0)}$	$T_5^{(1)}$	$T_4^{(2)}$	$T_3^{(3)}$	…			
…	…	…	…	…			
$T_{m-1}^{(0)}$	$T_{m-2}^{(1)}$	$T_{m-3}^{(2)}$	$T_{m-4}^{(3)}$	…	$T_1^{(m-2)}$		
$T_m^{(0)}$	$T_{m-1}^{(1)}$	$T_{m-2}^{(2)}$	$T_{m-3}^{(3)}$	…	$T_2^{(m-2)}$	$T_1^{(m-1)}$	
$T_{m+1}^{(0)}$	$T_m^{(1)}$	$T_{m-1}^{(2)}$	$T_{m-2}^{(3)}$	…	$T_3^{(m-2)}$	$T_2^{(m-1)}$	$T_1^{(m)}$

这一方法是 Romberg 于 1955 年提出的，除数值积分外，在常微分方程、偏微分方程数值解等许多工程计算中有广泛应用[1]。

9.2　建部贤弘的累遍增约术与 Romberg 算法

建部贤弘在《缀术算经》(1722)第十一“探圆数”中，给出了求圆周率的如下算法(图 9.1)：

截径一尺之圆，以造四角求截周幂，又截造八角求截周幂，又截造十六角求截周幂，又截造三十二角，又造六十四角，又造一百二十八角，以上逐倍角数，皆求截周幂，视其数，随倍角数徐近真数，然不能穷究真数，故以逐角截周幂递相减，视其差，以增约之术究求真数。

以其截周幂四角以上逐与前段相减，余为各一差，探以后差除前差，会得逐差数以四分之一为极限，则依增约术，约法内减一，余三，以约各一差，加入各其段截周幂，为一遍约周幂。以一遍约周幂八角以上逐与前段相减，余为各二差，探以后差除前差，会得逐差数以一十六分之一为极限，则依增约术，约法内减一，余一十五，以约各二差，加入各

〔1〕 刘诗俊. 变分法、有限元法和外推法[M]. 北京：中国铁道出版社，1986：138.

其段一遍约周幂,为二遍约周幂。以二遍约周幂一十六角以上逐与前段相减,余为各三差,探以后差除前差,会得逐差数以六十四分之一为极限,则依增约术,求三遍约周幂。求四遍约周幂者,增约之数为二百五十六分之一为极限,五遍者,一千〇二十四分之一,如此探得增约之法为四因之数。累约约周幂之遍而求定周幂也[1]。

探圓數　第十一

徑一尺ノ圓ヲ截テ四角ト造テ截周冪ヲ求ム亦截テ八角ト造テ截周冪ヲ求ム亦截テ一十六角ト造テ截周冪ヲ求ム亦截テ三十二角ト造シ亦六十四角ト造シ亦一百二十八角ト造以上逐テ角數ヲ倍シテ各截周冪ヲ求メテ其數ヲ視ルニ角數倍スルニ隨テ徐眞數ニ近キヲ得ルト雖敢眞數ヲ究ルヿ無故ニ逐角ノ截周冪ヲ以テ遞ニ相減シテ其差漸損スル數ヲ探リテ增約ノ術ヲ以テ眞數ヲ究得也（其求截周冪術及所求之數截于圓率故今畧之）

始關氏角面冪ヲ開平方ニシテ各角面ヲ求テ截周ヲ用ユ今角面冪ヲ以テ截周冪ヲ求ル者開平方ノ功ヲ省也是首ヨリ冪數ヲ用ルヿヲ察スルニ非ス先截周ヲ用テ後玄探テ冪數ヲ用ルヿヲ會ス

其截周冪四角以上ヲ以テ逐テ前段ト相減シテ餘ヲ各一差トス後差ヲ以テ前差ヲ除シ探ルニ逐差ノ數四分之一ノ極限ナルヿヲ會ス卽增約ノ術ニ依テ約法ノ內一ヲ減シテ餘三ヲ以テ各一差ヲ約メ各其段ノ截周冪ニ加テ一遍約周冪

图 9.1　建部贤弘《缀术算经》第十一"探圆数"

根据这段术文,下面来分析建部贤弘累遍增约术求圆周率的方法。

建部贤弘首先采用割圆术,以圆内接正多边形周长幂逼近圆周长幂。设圆直径 $d=1$(尺),记圆的内接正 n 边形边长为 a_n,其周长为 p_n,其周长幂为 p_n^2,为统一起见,记为 $T_n^{(0)}$,以表示 π^2 的初始近似值序列,圆周长记为 p,显然 $T_n^{(0)} = p_n^2 \to p^2 = \pi^2$。

用割圆术求出 $\{T_i^{(0)}\}$ $(i = 1, 2, 3, \cdots, n)$ 序列(截周幂),并观察其一阶差分(各一差),构成公比为 $\frac{1}{4}$(一遍增约之法)的等比级数:

各一差:　　$\Delta_i^{(1)} = T_{i+1}^{(0)} - T_i^{(0)}$,

一遍约法:　　$r_1 = \dfrac{\Delta_{i+1}^{(1)}}{\Delta_i^{(1)}} \approx \dfrac{1}{4}$

一遍约周幂:$T_i^{(1)} = T_i^{(0)} + (1 + r_1 + r_1^2 + r_1^3 + \cdots)\Delta_i^{(1)} = T_i^{(0)} + \dfrac{4\Delta_i^{(1)}}{3}$

〔1〕 建部賢弘. 綴術算經[M]. 内閣文庫藏抄本,藏書号: 23851.

这便是一遍增约，得到第二次近似值序列$\{T_i^{(1)}\}$ $(i=1, 2, 3, \cdots, n-1)$，观察其差分(各二差)，构成公比为$\frac{1}{4^2}$(二遍增约之法)的等比级数，又作第二次增约：

各二差：　$\Delta_i^{(2)} = T_{i+1}^{(1)} - T_i^{(1)}$

二遍约法：　$r_2 = \frac{\Delta_{i+1}^{(2)}}{\Delta_i^{(2)}} \approx \frac{1}{4^2}$

二遍约周幂：$T_i^{(2)} = T_i^{(1)} + (1 + r_2 + r_2^2 + r_2^3 + \cdots)\Delta_i^{(2)} = T_i^{(1)} + \frac{4^2\Delta_i^{(2)}}{4^2 - 1}$

得到第三次近似值序列$\{T_i^{(2)}\}$ $(i=1, 2, 3, \cdots, n-2)$，观察其差分(各三差)，构成公比为$\frac{1}{4^3}$(三遍增约之法)的等比级数，又作第三次增约：

各三差：　$\Delta_i^{(3)} = T_{i+1}^{(2)} - T_i^{(2)}$，

三遍约法：　$r_3 = \frac{\Delta_{i+1}^{(3)}}{\Delta_i^{(3)}} \approx \frac{1}{4^3}$，

三遍约周幂：$T_i^{(3)} = T_i^{(2)} + (1 + r_3 + r_3^2 + r_3^3 + \cdots)\Delta_i^{(3)} = T_i^{(2)} + \frac{4^3\Delta_i^{(3)}}{4^3 - 1}$

得到第四次近似值序列$\{T_i^{(3)}\}$ $(i=1, 2, 3, \cdots, n-3)$，逐此下去，不断求

① 第m遍各差：$\Delta_i^{(m)} = T_{i+1}^{(m-1)} - T_i^{(m-1)}$

② 第m遍增约法：$r_m = \frac{\Delta_{i+1}^{(m)}}{\Delta_i^{(m)}} \approx \frac{1}{4^m}$

③ 第m遍约周幂：

$$T_i^{(m)} = T_i^{(m-1)} + (1 + r_m + r_m^2 + r_m^3 + \cdots)\Delta_i^{(m)} = T_i^{(m-1)} + \frac{4^m\Delta_i^{(m)}}{4^m - 1} \qquad (9.4)$$

建部贤弘求到第八遍约周幂($m=8$，即$i=1, 2, 3, \cdots, 9$)作为定周幂π^2，得到

$\pi = 3.141\ 592\ 653\ 589\ 793\ 238\ 462\ 643\ 383\ 279\ 502\ 884\ 197\ 12$[1]

---

〔1〕 小川束教授用计算机按照累遍增约术进行验算，获得的数值是$\pi=3.141\ 592\ 653\ 589\ 793\ 238\ 462\ 643\ 383\ 279\ 502\ 884\ 197\ 168\ 984$，而$\pi$准确值是3.141 592 653 589 793 238 462 643 383 279 502 884 197 169 399。见：小川束. 近世日本数学における円理の萌芽との特質——数式処理システムによる17、18世紀日本数学の再現を方法として[D]. 東京：東京大学学術博士論文，1998.

精确到小数点后 41 位。

$$事实上，T_i^{(m)} = T_i^{(m-1)} + \frac{4^m \Delta_i^{(m)}}{4^m - 1}$$

$$= T_i^{(m-1)} + \frac{4^m (T_{i+1}^{(m-1)} - T_i^{(m-1)})}{4^m - 1} = \frac{4^m T_{i+1}^{(m-1)} - T_i^{(m-1)}}{4^m - 1}$$

显而易见，建部贤弘累遍增约公式(9.4)与数值积分的逐次半分外推公式(9.2)是等价的，上述累遍增约过程与数值积分中的 Romberg 算法程序完全一致。

建部贤弘说:“增约之法为四的幂数，随着求近似圆周幂的遍数增加而求得定周幂”，那么每遍增约之法(即等比级数公比之倒数)果真为 4^m 吗？其各遍约周幂 $\{T_i^{(m)}\}$ 是否收敛于 π^2 呢？换句话说，建部贤弘的累遍增约术是否具有科学性？结论是肯定的，证明如下：

$$截周幂\ T_n^{(0)} = p_n^2 = n^2 a_n^2 = n^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right) = \pi^2 \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}}\right]^2 \to \pi^2$$

若令 $\frac{1}{n} = h$，其 Taylor 展开式为

$$T_n^{(0)} = p^2(h) = \frac{1 - \cos 2\pi h}{2h^2} = \frac{1}{2h^2}\left(\frac{2^2\pi^2h^2}{2!} - \frac{2^4\pi^4h^4}{4!} + \frac{2^6\pi^6h^6}{6!} - \frac{2^8\pi^8h^8}{8!} + \cdots\right)$$

$$= \pi^2 - \frac{2^3\pi^4h^2}{4!} + \frac{2^5\pi^6h^4}{6!} - \frac{2^7\pi^8h^6}{8!} + \cdots$$

将系数 $\frac{(-1)^k 2^{2k+1}\pi^{2k+2}}{(2k+2)!}$ 简记为 A_k，则

$$T_n^{(0)} = p^2(h) = \pi^2 + A_1h^2 + A_2h^4 + A_3h^6 + A_4h^8 + \cdots = \pi^2 + o(h^2)$$

应当注意，此式也不含 h^{2k-1} 项，并且 A_k 是与 h 无关的常数。

为了不断提高 $\{T_n^{(0)}\}$ 收敛速度，依次消去各误差项 A_kh^k。现从正 4 边形起，增倍割圆，即取 $n_1 = 4$，$n_2 = 8$，$n_3 = 16$，$n_4 = 32$，…，于是有 $\frac{h_i}{h_{i+m}} = 2^m$。

现消去第一误差项，对 $\{T_i^{(0)}\}$ 作如下外推：

$$T_i^{(0)} = p^2(h_i) = \pi^2 + A_1 h_i^2 + A_2 h_i^4 + A_3 h_i^6 + A_4 h_i^8 + \cdots \quad ①$$

$$T_{i+1}^{(0)} = p^2(h_{i+1}) = \pi^2 + A_1 h_{i+1}^2 + A_2 h_{i+1}^4 + A_3 h_{i+1}^6 + A_4 h_{i+1}^8 + \cdots \quad ②$$

②$\times h_i^2 -$ ①$\times h_{i+1}^2$，并除以 $(h_i^2 - h_{i+1}^2)$，得

$$\begin{aligned} T_i^{(1)} &= \frac{h_i^2 T_{i+1}^{(0)} - h_{i+1}^2 T_i^{(0)}}{h_i^2 - h_{i+1}^2} = \frac{4T_{i+1}^{(0)} - T_i^{(0)}}{4-1} \\ &= \pi^2 - A_2 h_i^2 h_{i+1}^2 - A_3 h_i^2 h_{i+1}^2 (h_i^2 + h_{i+1}^2) - A_4 h_i^2 h_{i+1}^2 (h_i^4 + h_{i+1}^4) + \cdots \\ &= \pi^2 + o(h_i^2 h_{i+1}^2) \end{aligned}$$

这便是第一次增约；

再消去第二误差项，对 $\{T_i^{(1)}\}$ 作如下外推：

$$T_i^{(1)} = \pi^2 - A_2 h_i^2 h_{i+1}^2 - A_3 h_i^2 h_{i+1}^2 (h_i^2 + h_{i+1}^2) - A_4 h_i^2 h_{i+1}^2 (h_i^4 + h_{i+1}^4) + \cdots \quad ③$$

$$T_{i+1}^{(1)} = \pi^2 - A_2 h_{i+1}^2 h_{i+2}^2 - A_3 h_{i+1}^2 h_{i+2}^2 (h_{i+1}^2 + h_{i+2}^2) - A_4 h_{i+1}^2 h_{i+2}^2 (h_{i+1}^4 + h_{i+2}^4) + \cdots \quad ④$$

④$\times h_i^2 -$ ③$\times h_{i+2}^2$，并除以 $(h_i^2 - h_{i+2}^2)$，得

$$\begin{aligned} T_i^{(2)} &= \frac{h_i^2 T_{i+1}^{(1)} - h_{i+2}^2 T_i^{(1)}}{h_i^2 - h_{i+2}^2} = \frac{4^2 T_{i+1}^{(1)} - T_i^{(1)}}{4^2 - 1} \\ &= \pi^2 + A_3 h_i^2 h_{i+1}^2 h_{i+2}^2 + A_4 h_i^2 h_{i+1}^2 h_{i+2}^2 (h_i^2 + h_{i+1}^2 + h_{i+2}^2) + \cdots \\ &= \pi^2 + o(h_i^2 h_{i+1}^2 h_{i+2}^2) \end{aligned}$$

即为第二次增约；

逐如此下去，得到第 m 次增约公式的递推式：

$$T_i^{(m)} = \frac{4^m T_{i+1}^{(m-1)} - T_i^{(m-1)}}{4^m - 1} = T_i^{(m-1)} + \frac{4^m \Delta_i^{(m)}}{4^m - 1}$$

即式(9.2)。至此，建部贤弘累遍增约术的科学性得到证明，实质即 Romberg 算法。

累遍增约术的详细记叙，虽载于 1722 年的《缀术算经》，但在 1683～1711 年著作的《大成算经》第十二卷“形率”中，建部贤弘已经使用了这种算法进行圆理计算，以求定周幂和定半背幂。《大成算经》的编著是从 1683 年

前后开始的，由关孝和、建部贤明、建部贤弘师徒三人共同策划合著的，由于关孝和当时已年老，且病弱体衰，建部贤明也多病且忙于公务，因此 1695 年以前，实由建部贤弘一人著作，共撰成前 12 卷，建部贤弘后因公务繁忙而不得不中止编著工作，其后由建部贤明增补修订，于 1711 年前后成书，共 20 卷。其中的第十二卷有关圆理的内容当是建部贤弘所作，因此可以断定，在 1695 年或稍前，建部贤弘就已发明了累遍增约术。也就是说，建部贤弘早 Romberg 两百六十余年就使用了逐次半分加速逼近算法。

必须说明，与中算一样，和算概念与方法往往是针对具体问题的，因此，很多数学方法不能抽象为具有普遍性的数学原理。和算中的数值逼近方法多是因解决圆理计算和求代数方程实根而形成的，因此，建部的累遍增约术同样也仅用于圆周率计算与弧长计算，以至于建部贤弘发明该法之后，直至川井久德(Kawai Hisanori，1766～?)的《开式新法》(1805 年刊)才再次出现这一算法，然而仍用于圆周率的计算[1]，其间鲜有和算家使用此法。

9.3 关孝和的一遍增约术

任何数学概念与方法的形成，绝不是孤立的、偶然的，总有特定的问题背景与历史渊源。对于构造累遍增约术的思想渊源，建部贤弘在术文之后，有一段耐人寻味的说明文字：

> 始关氏理会以增约之术求定周止一遍，故以至十三万千七十二角截周，究得二十许位真数。今探会用累遍增约术，以至千二十四角截周幂，究得四十余位真数。此亦初不察用累遍增约，用一遍增约后，幽探而会得用累遍。此缀术本旨也[2]。

这段话明确指出，其累遍增约术是在关孝和一遍增约术求圆数的方法基础上发展而来的。关孝和的《括要算法》"亨卷"记载其圆理研究成果，他使村松茂清(Muramatsu Shigekiyo，1608～1695)的碎抹术(即割圆术)依次求出圆内接正 2^{n+1} 边形边长 p_n，求至

[1] 平山諦. 增約術[J]. 数学史研究，1989(120)：17.
[2] 建部賢弘. 綴術算經[M]. 内閣文庫藏抄本，藏書号：23851.

$$p_{14} = 3.141\ 592\ 648\ 776\ 985\ 670\ 8$$

$$p_{15} = 3.141\ 592\ 652\ 386\ 591\ 357\ 1$$

$$p_{16} = 3.141\ 592\ 653\ 288\ 992\ 775\ 9$$

时，给出定周公式：

$$p = p_{15} + \frac{(p_{15} - p_{14})(p_{16} - p_{15})}{(p_{15} - p_{14}) - (p_{16} - p_{15})} \tag{9.5}$$

于是得到定周 $p = 3.141\ 592\ 653\ 59$，精确到小数点后 10 位。

关孝和并没有说明式(9.5)的由来，松永良弼在《起源解》和《算法集成》中对其作如下解释：

因 $$r_1 = \frac{\delta_{15}}{\delta_{14}} = \frac{p_{16} - p_{15}}{p_{15} - p_{14}} (\approx 1/4)$$

从而认为 $$\frac{\delta_{k+1}}{\delta_k} = \frac{(p_{k+2} - p_{k+1})}{(p_{k+1} - p_k)} = r_1 \ (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n,\ \cdots)$$

则 $$\delta_k = r_1^{k-15}\delta_{15} \ (k = 15,\ 16,\ 17,\ \cdots)$$

于是，$p_k = p_{15} + \delta_{15} + r_1\delta_{15} + r_1^2\delta_{15} + \cdots + r_1^{k-15}\delta_{15}$

从而
$$\begin{aligned} p &= p_{15} + (1 + r_1 + r_1^2 + \cdots + r_1^k + \cdots)\delta_{15} \\ &= p_{15} + \frac{\delta_{15}}{1 - r_1} = p_{15} + \frac{p_{16} - p_{15}}{1 - \dfrac{p_{16} - p_{15}}{p_{15} - p_{14}}} \\ &= p_{15} + \frac{(p_{15} - p_{14})(p_{16} - p_{15})}{(p_{15} - p_{14}) - (p_{16} - p_{15})}. \end{aligned}$$

根据建部贤弘所说："始关氏理会以增约之术求定周止一遍"，可以确信松永良弼对关孝和的增约公式的上述解释是符合关孝和本意的。

事实上，$p_n = 2^{n+1}\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) \to \pi$，若令 $\frac{\pi}{2^{n+1}} = x$，按 Taylor 展开：

$$p_n = \left(\frac{\pi}{x}\right)\sin x = \pi - \frac{x^2}{3!}\pi + \frac{x^4}{5!}\pi - \frac{x^6}{7!}\pi + \cdots$$

作一次外推(一次增约)，即

$$\frac{x_i^2 p_{i+1} - x_{i+1}^2 p_i}{x_i^2 - x_{i+1}^2} = \frac{p_{i+1} - \frac{x_{i+1}^2}{x_i^2} p_i}{1 - \frac{x_{i+1}^2}{x_i^2}} = \frac{p_{i+1} - r_1 p_i}{1 - r_1} = p_i + \frac{\delta_i}{1 - r_1}$$

这里 $\frac{x_{i+1}}{x_i} = \frac{1}{2}$，故 $\frac{x_{i+1}^2}{x_i^2} = r_1$。

可能关孝和凭数学直觉推测出 $\frac{\delta_{k+1}}{\delta_k} = \frac{p_{k+2} - p_{k+1}}{p_{k+1} - p_k} \approx \frac{1}{4} = r_1$。其《括要算法》"圆法起率"中的计算数据如下[1]：

$p_1 = 2.828\ 427\ 124\ 746\ 190\ 097\ 6$ 微强

（应为 2.828 427 124 746 190 097 603 377 448 419 396 157 139 343 750 753 90）

$p_2 = 3.061\ 467\ 458\ 920\ 718\ 173\ 8$ 强

（应为 3.061 467 458 920 718 173 827 679 872 243 190 934 090 756 499 885 02）

$p_3 = 3.121\ 445\ 152\ 258\ 052\ 285\ 6$ 弱

（应为 3.121 445 152 258 052 285 572 557 895 632 355 854 843 065 884 031 28）

$p_4 = 3.136\ 548\ 490\ 545\ 939\ 263\ 8$ 强

（应为 3.136 548 490 545 939 263 814 258 044 436 539 067 556 373 541 360 02）

$p_5 = 3.140\ 331\ 156\ 954\ 752\ 912\ 3$ 强

（应为 3.140 331 156 954 752 912 317 118 524 331 690 132 143 703 233 648 19）

$p_6 = 3.141\ 277\ 250\ 932\ 772\ 868\ 1$ 弱

（应为 3.141 277 250 932 772 868 062 019 770 788 214 408 379 663 262 649 79）

$p_7 = 3.141\ 513\ 801\ 144\ 301\ 076\ 3$ 弱

（应为 3.141 513 801 144 301 076 328 515 059 456 822 307 935 313 815 492 93）

$p_8 = 3.141\ 572\ 940\ 367\ 091\ 384\ 3$ 弱

（应为 3.141 572 940 367 091 384 135 800 110 270 761 429 533 637 794 504 36）

$p_9 = 3.141\ 587\ 725\ 277\ 159\ 700\ 8$ 弱

（应为 3.141 587 725 277 159 700 628 854 262 701 918 739 399 280 858 574 84）

$p_{10} = 3.141\ 591\ 421\ 511\ 199\ 974\ 1$ 强

（应为 3.141 591 421 511 199 973 997 971 763 740 833 955 747 562 650 086 18）

---

〔1〕 関孝和. 規矩要明算法[A]. 平山諦，下平和夫，広瀬秀雄編. 関孝和全集[C]. 大阪：大阪教育図書，1974.

$p_{11} = 3.141\ 592\ 345\ 570\ 117\ 742\ 5$ 弱

（应为 3.141 592 345 570 117 742 340 375 994 157 369 930 305 206 075 651 20）

$p_{12} = 3.141\ 592\ 576\ 584\ 872\ 666\ 8$ 强

（应为 3.141 592 576 584 872 665 681 606 092 237 875 309 732 053 278 431 14）

$p_{13} = 3.141\ 592\ 634\ 338\ 562\ 990\ 8$ 强

（应为 3.141 592 634 338 562 989 095 478 263 627 791 293 954 032 170 748 46）

$p_{14} = 3.141\ 592\ 648\ 776\ 985\ 670\ 8$ 弱

（应为 3.141 592 648 776 985 669 485 107 969 277 177 075 697 766 001 906 32）

$p_{15} = 3.141\ 592\ 652\ 386\ 591\ 357\ 1$ 强

（应为 3.141 592 652 386 591 345 803 525 521 057 963 884 338 655 244 174 42）

$p_{16} = 3.141\ 592\ 653\ 288\ 992\ 775\ 9$ 弱

（应为 3.141 592 653 288 992 765 271 943 042 173 740 003 460 576 037 525 66）

计算上述数列的一阶差分，结果如下：

$\delta_1 = p_2 - p_1 = 0.233\ 040\ 334\ 174\ 528\ 076\ 2$

$\delta_2 = p_3 - p_2 = 0.059\ 977\ 693\ 337\ 334\ 111\ 8$

$\delta_3 = p_4 - p_3 = 0.015\ 103\ 338\ 287\ 886\ 978\ 2$

$\delta_4 = p_5 - p_4 = 0.003\ 782\ 666\ 408\ 813\ 648\ 5$

$\delta_5 = p_6 - p_5 = 0.000\ 946\ 093\ 978\ 019\ 955\ 8$

$\delta_6 = p_7 - p_6 = 0.000\ 236\ 550\ 211\ 528\ 208\ 2$

$\delta_7 = p_8 - p_7 = 0.000\ 059\ 139\ 222\ 790\ 307\ 9$

$\delta_8 = p_9 - p_8 = 0.000\ 014\ 784\ 910\ 068\ 316\ 5$

$\delta_9 = p_{10} - p_9 = 0.000\ 003\ 696\ 234\ 040\ 273\ 3$

$\delta_{10} = p_{11} - p_{10} = 0.000\ 000\ 924\ 058\ 917\ 768\ 4$

$\delta_{11} = p_{12} - p_{11} = 0.000\ 000\ 231\ 014\ 754\ 924\ 3$

$\delta_{12} = p_{13} - p_{12} = 0.000\ 000\ 057\ 753\ 690\ 323\ 4$

$\delta_{13} = p_{14} - p_{13} = 0.000\ 000\ 014\ 438\ 422\ 680\ 3$

$\delta_{14} = p_{15} - p_{14} = 0.000\ 000\ 003\ 609\ 605\ 686\ 3$

$\delta_{15} = p_{16} - p_{15} = 0.000\ 000\ 000\ 902\ 401\ 418\ 8$

关孝和知道以正多边形边长逼近圆周长时，割圆过程不可无限地进行下去，割到一定位限时，宜作理想近似值（定周）。正如建部贤弘所说：“随倍

角数徐近真数，然不能穷究真数，故以逐角截周幂递相减，视其差，以增约之术究求真数。”[1]观察上述系列近似值的一阶差分，容易看出一阶差分构成公比近似为 1/4 的几何级数。

9.4　刘徽的“以十二觚幂率消息”探源

计算圆周率过程中的数值加速逼近的思想可以上溯到三国时代中国数学家刘徽的割圆术求圆周率的微数的算法。

刘徽在《九章算术》方田章“圆田术注”(图 9.2)中为了获得准确的圆周率，创造了割圆术，他从圆内接正 6 边形算起，逐渐把边数加倍，反复地应用勾股定理，由圆内接正 3×2 边形一边，可求得正 3×2^2 边形的边长，由正 3×2^2 边形求正 3×2^3 边形边长，……，由正 3×2^n 边形求 $3\times2^{n+1}$ 边形的边长，这些圆内接多边形面积序列 $\{S_n\}$ 逐渐逼近圆面积 S。

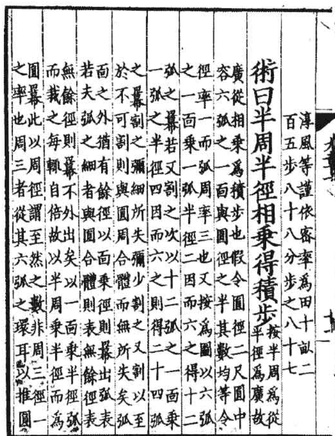

淳風等謹依密率爲田十畝二百五步八十八分步之八十七
術曰半周半徑相乘得積步按半周爲從半徑爲廣故
廣從相乘爲積步也假令圓徑二尺圓中容六弧之一面與圓徑之半其數均等令
徑一率而弧周率三也又按爲圖以六弧之一面乘一弧半徑二因而六之得十二
弧之羃若又割之次以十二弧之一面乘一弧之半徑四因而六之則得二十四弧
之羃割之彌細所失彌少割之又割以至於不可割則與圓周合體而無所失矣
面之外猶有餘徑以面乘徑則羃出弧表若夫之弧之細者與圓合體則表無餘徑表
無餘徑則羃不外出矣以一面乘半徑弧而裁之每輒自倍故以半周乘半徑而爲
圓羃此以周徑謂至然之數非周三徑一之率也周三者從其六弧之環耳以推圓

图 9.2　刘徽的圆田术注

如图 9.3，设圆直径 $d=2$，半径 $R=1$，圆内接正 3×2^n 边形面积 S_n，边长 a_n，周长 P_n。显然，$OA=OB=OC=a_1=R=1$，$AB=a_n$，$OG=\sqrt{R^2-\left(\frac{a_n}{2}\right)^2}$，

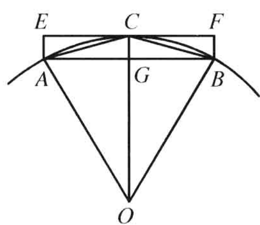


图 9.3

$CG=R-OG$，$AC=BC=a_{n+1}=$

$$\sqrt{\left[R-\sqrt{R^2-\left(\frac{a_n}{2}\right)^2}\right]^2+\left(\frac{a_n}{2}\right)^2}\tag{9.6}$$

刘徽通过迭代公式(9.6)，逐步求出正 3×2^n 边形的边长 a_n，再按《九章算术》中的“半周、半径相乘”公式，依次算出正 $3\times2^{n+1}$ 边形的面积 S_{n+1}，即

$$S_{n+1}=3\times2^n\times\left(\frac{1}{2}a_nR\right)=\frac{1}{2}P_nR=3\times2^{n-1}a_nR$$

[1] 建部賢弘. 綴術算經[M]. 内閣文庫藏抄本，藏書号：23851.

刘徽认识到，“觚面之外，又有余径。以面乘余径，则幂出觚表。若夫觚之细者，与圆合体，则表无余径。表无余径，则幂不外出矣”[1]，就是说，圆内接正 3×2^n 边形的每边和圆周之间有一段距离，称作“余径”，把每边长乘以余径，其总和是 $2(S_{n+1}-S_n)$，加到 S_n 上，那么 $S_n+2(S_{n+1}-S_n)>S$。当 n 无限大时，3×2^n 边形和圆周合体，表径等于零，即所谓的“表无余径，则幂不外出矣”，乃指 $\lim\limits_{n\to\infty}[S_n+2(S_{n+1}-S_n)]=S$。

显然，$S_{n+1}<S<S_n+2(S_{n+1}-S_n)=S_{n+1}+(S_{n+1}-S_n)$，即 $0<S-S_{n+1}<S_{n+1}-S_n$

刘徽算至 $S_5=3.13+\dfrac{584}{62\,500}$，$S_6=3.14+\dfrac{64}{62\,500}$，并求出差幂 $S_6-S_5=\dfrac{105}{62\,500}$，倍此差幂得 $\dfrac{210}{62\,500}$，即 $2(S_6-S_5)=\dfrac{210}{62\,500}$，为正 96 边形的外弧田。

于是，
$$
\begin{aligned}
S_5+\frac{210}{62\,500}&=3.13+\frac{584}{62\,500}+\frac{210}{62\,500}\\
&=3.13+\frac{794}{62\,500}=3.14+\frac{169}{62\,500}
\end{aligned}
$$

这样的面积已经“出圆之表”了，显然圆面积 S 满足

$$S_6<S<S_5+2(S_6-S_5)=S_6+(S_6-S_5)$$

即 $3.14+\dfrac{64}{62\,500}=S_6<S<S_5+\dfrac{210}{62\,500}=3.14+\dfrac{169}{62\,500}$。

刘徽的计算结果列于表 9.2。

刘徽求出正 96 边形面积 $S_5=3.13+\dfrac{584}{62\,500}$，正 192 边形面积 $S_6=3.14+\dfrac{64}{62\,500}$ 后，不再继续割圆，而认为“而觚差幂六百二十五分寸之一百五。以一百九十二觚之幂为率消息，当取此分寸之三十六，以增于一百九十二觚之幂，以为圆幂，三百一十四寸二十五分寸之四”，进行了所谓“以十二觚幂为率消息”的数值处理，即 $S=S_6+\dfrac{36}{62\,500}$，由此得圆周率 $\pi\approx 3.141\,6$。

---

〔1〕 九章算术・方田[A]. 郭书春主编. 中国科学技术典籍通汇・数学卷[Z]. 第 1 册. 郑州：河南教育出版社，1993：105.

表 9.2 刘徽割圆术计算数值表

n	边数	正多边形 边长 a_n	正多边形 周长 P_n	正多边形面积 $S_n=3\times 2^{n-2}\times a_{n-1}R$	面积一阶差 $\Delta_n=(S_{n+1}-S_n)$	上界 $S_{n+1}+(S_{n+1}-S_n)$
1	6	1	$P_1=3\times 2a_1$	$S_1=\frac{3\sqrt{3}}{2}=2.598\,076\,211\,353\,315\,940\,291\,169\,512\,258\,8$	$\Delta_1=3-\frac{3\sqrt{3}}{2}=0.401\,923\,788\,646\,683\,988\,190\,488\,889\,813\,42$	3.401 923 789
2	12	$\sqrt{2-\sqrt{3}}$	$P_2=3\times 2^2a_2$	$S_2=3\times 1\times a_1R=3$	$\Delta_2=0.105\,828\,541\,230\,249\,761\,895\,265\,692\,146\,5$	3.211 657 08
3	24	$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$	$P_3=3\times 2^3a_3$	$S_3=3\times 2\times a_2R=3.105\,828\,541\,230\,249\,761\,895\,265\,692\,146\,5$	$\Delta_3=0.026\,800\,072\,050\,987\,111\,538\,233\,875\,762\,671$	3.159 428 69
4	48	$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$	$P_4=3\times 2^4a_4$	$S_4=3\times 4\times a_3R=3.132\,628\,613\,281\,236\,873\,433\,499\,567\,909\,2$	$\Delta_4=0.006\,721\,589\,765\,635\,194\,169\,135\,502\,306\,744\,5$	3.146 071 79
5	96	$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}$	$P_5=3\times 2^5a_5$	$S_5=3\times 8\times a_4R=3.139\,350\,203\,046\,872\,067\,602\,635\,070\,215\,9=3.13+\frac{584}{62\,500}$	$\Delta_5=0.001\,681\,747\,843\,657\,710\,461\,684\,473\,557\,397\,7\approx\frac{105}{62\,500}$	3.142 713 70
6	192	$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}$	$P_6=3\times 2^6a_6$	$S_6=3\times 16\times a_5R=3.141\,031\,950\,890\,529\,778\,064\,319\,543\,773\,3=3.14+\frac{64}{62\,500}$	$\Delta_6=0.000\,420\,521\,394\,814\,521\,443\,095\,145\,514\,234\,90$	3.141 872 99
7	384	$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}}$	$P_7=3\times 2^7a_7$	$S_7=3\times 32\times a_6\times R=3.141\,452\,472\,285\,344\,299\,507\,414\,689\,287\,5$	$\Delta_7=\cdots$	
		…	…	…	…	
k		a_k	$P_k=3\times 2^ka_k$	$S=3.14+\frac{64}{62\,500}+\frac{36}{62\,500}$		

随后刘徽通过继续割圆算到正 3 072 边形，得到 $\pi \approx 3.141\ 59$，验证了这一结果，称："当求一千五百三十六觚之一面，得三千七十二觚之幂，而裁其微分，数亦宜然，重其验耳。"

至于修正值 $\frac{36}{62\ 500}$ 如何而来，由于刘徽注文过于简略，难审其详，后世研究者多有争议。三上义夫[1]解释为

$$(r_1 + r_1^2 + \cdots + r_1^k + \cdots)(S_6 - S_5) = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} \times \frac{105}{62\ 500} = \frac{35}{62\ 500} \approx \frac{36}{62\ 500}$$

观察面积一阶差 Δ_n：

$$\Delta_1 = (S_2 - S_1) = 0.401\ 923\ 788\ 646\ 683\ 988\ 190\ 488\ 889\ 813\ 4$$

$$\Delta_2 = (S_3 - S_2) = 0.105\ 828\ 541\ 230\ 249\ 761\ 895\ 265\ 692\ 146\ 5$$

$$\Delta_3 = (S_4 - S_3) = 0.026\ 800\ 072\ 050\ 987\ 111\ 538\ 233\ 875\ 762\ 6$$

$$\Delta_4 = (S_5 - S_4) = 0.006\ 721\ 589\ 765\ 635\ 194\ 169\ 135\ 502\ 306\ 7$$

$$\Delta_5 = (S_6 - S_5) = 0.001\ 681\ 747\ 843\ 657\ 710\ 461\ 684\ 473\ 557\ 3$$

容易看出 $\Delta_{n-1}/\Delta_n \approx 4$，这样的解释显然是受关孝和增约术算法的启发，李俨也作出这样的解释[2]。笔者以为这是"以十二觚幂为率消息"复原方案中，最自然合理的方案。

从现存资料来看，《九章算术》在日本史料中最晚的记录是应长元年(1311)中岩圆月(Chugan Engetsu，1300～1375)和尚的日记："应长元年辛亥春，在池房就道惠和尚读孝经、论语，且学九章算法"[3]，时至关氏已相隔三百余年。表明《九章算术》及其刘徽注、李淳风注等早已在日本失传，祖冲之的《缀术》也早在日本失传。从关孝和的著作中很难看出《九章算术》及其刘徽注影响的明显痕迹，故无法肯定关孝和此算法直接来源于刘徽。而且建部贤弘在《缀术算经》序中说：

---

〔1〕 三上義夫. 関孝和の業績と京阪算家並に支那の算法との関係及び比較[J]. 東洋学報，1932(22).

〔2〕 李俨. 中国算学史[M]. 商务印书馆，1938：29.

〔3〕 中巌円月. 佛種慧済禪師中巌円月和尚自歴譜[A]. 東京大学史料編纂所編纂. 大日本史料[C]. 第六編之四十三. 東京：東京大学出版部，1996. 3：12.

> 《隋书》：古之九数，圆周率三径率一，其术疏舛。自刘歆、张衡、刘徽、王蕃、皮延宗之徒，各设新率，未臻折衷。宋南徐州从事史祖冲之更开密法，以圆径一亿为一丈，圆周盈数三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒七忽，朒数三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒六忽，正数在盈朒二限之间。密率圆径一百一十三，圆周三百五十五，约率圆径七，圆周二十二。尝关氏碎抹圆而求定周，以零约术造径周之率，尔后历二十余年，睹《隋志》，有周数、率数咸邂逅符合者。咨祖子也关子也，虽异邦异时，会真理相同，可谓妙也[1]。

其所谓"尔后历二十余年，睹《隋志》，有周数、率数咸邂逅符合者。咨祖子也关子也，虽异邦异时，会真理相同，可谓妙也"，说明关孝和与建部贤弘都没有见到祖冲之的《缀术》。

《隋书·律历志》记载：

> 古之九数，圆周率三圆径率一，其术疏舛，自刘歆、张衡、刘徽、王蕃、皮延宗之徒，各设新率，未臻折衷。宋末南徐州从事史祖冲之更开密率，以圆径一亿为一丈，圆周盈数三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒七忽，朒数三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒六忽，正数在盈朒二限之间，密率圆径一百一十三，圆周三百五十五，约率圆径七，周二十二。又设开差幂、开差立，兼以正圆参之，指要精密，算氏之最者也。所著之书，名为《缀术》，学官莫能究其深奥，是故废而不理[2]。

这段关于祖冲之业绩的历史记录，可能直接刺激关孝和对圆周率问题的研究。关氏用零约术重新获得祖氏约率与密率，说明他企图复原祖冲之的"缀术"方法。其零约术有似祖冲之时代天文学家何承天的"调日法"。当然，关氏、建部氏的方法也未必就是祖冲之的缀术方法。

---

〔1〕 建部賢弘. 綴術算經[M]. 内閣文庫藏抄本，藏書号：23851.
〔2〕 中华书局编辑部编. 历代天文律历等志汇编[C]. 北京：中华书局，1976.

第 10 章

几何求积与无穷级数展开法：圆理缀术

无穷小分析起源的背景是多方面的，在几何度量这一背景上，东西方数学是一致的，古代各种文明中都出现过不同程度的无穷小算法。和算中的圆理[1]指度量曲线(面)型几何形体的无穷小算法，和算中的“缀术”后来专指无穷级数展开方法[2]。纵观和算的内容和方法，其圆理方面的成就最为突出，早期的圆理算法主要是有关圆的近似计算，后来发展成为采用积分法进行幂级数展开，并且形成了求曲线、曲面形体的面积和体积的一般化算法。相对于深受西学影响的清代关于三角函数、对数的幂级数展开研究，和算则以东方传统方法独自向微积分道路迈进，获得了一些与西方 17 世纪微积分学中相应的成果。

本章在介绍和算圆理方法的同时，分析和算圆理方法的中算背景，以阐述其方法特征及其基础。

---

〔1〕 圆理，一般指求圆周率、圆弧长、球体积等方面的计算，关孝和开拓了这一传统算学领域，随后建部贤弘采用无穷级数进行这方面的计算，后经久留岛义太、松永良弼、安岛直圆、和田宁等人的发展，使之成为相当于积分法的数学方法。“圆理”一词，最初出现于泽口一之的《古今算法记》，后来在京阪地区的和算家中使用，虽然江户地区的关流和算家在圆理方面的研究业绩比较特出，但使用“圆理”这一术语的时间稍晚，关流和算著作中较早使用“圆理”说法的是《圆理发起》(1728)，后来《圆理缀术》、《圆理弧背术》等关流算书普遍使用。

〔2〕 “缀术”一语，原为中国南北朝数学家祖冲之的数学著作名，也是祖冲之发明的一种数学方法，因该书大概在北宋时已失传，故其缀术方法也随之失传。1722 年，建部贤弘撰《缀术算经》，该书序称：“缀术者，缀而探索、以会得术理者也”，其“缀术”，即连缀探索的意思，实际是归纳方法。序中又称：“按《隋史》，云祖冲之所著之书，名为‘缀术’，学官莫能究其深奥，是故废而不理。吾适采用彼‘缀’之一字，至熟思。冲之，是可谓上古达人，盖其玄妙之真实，听不可识、思不可得者乎。”表明建部贤弘在试图复原祖冲之的缀术。建部贤弘在另外一本关于弧背的无穷级数展开研究的著作《圆理弧背缀术》中，也使用“缀术”这一术语，谓作“开方缀术”，指二项式的无穷级数展开法，后来的和算家把无穷级数展开法统称为“缀术”，并且常常与“圆理”一词连用，称作“圆理缀术”。

10.1　中国古代数学中的圆理问题

10.1.1　中国古代的无穷小算法

中国古代的无穷和极限思想见诸先秦哲学思想之中，而中国古代数学中的无穷小算法，最早属于刘徽的工作。在《九章算术注》中，刘徽先后三次使用了无穷小算法，即方田章的圆田术注与弧田术注，以及少广章的阳马术注。

在方田章的圆田术注中，刘徽创立割圆术以求圆周率，对其计算过程的分析，已详于本书第9章，这里不再重述。

在方田章的弧田术注中，刘徽同样用割圆术求弓形面积。

《九章算术》弧田术曰：

以弦乘矢、矢又自乘，并之，二而一。

刘徽注曰：

方中之圆，圆里十二觚之幂，合外方之幂四分之三也。中方合外方之半，则殊实合外方四分之一也。弧田，半圆之幂也，故依半圆之体而为之术。以弦乘矢而半之则为黄幂，矢自乘而半之为二青幂。青、黄相连为觚体。觚体法当应规，今觚面不至外畔，失之于少矣。圆田旧术以周三径一为率，俱得十二觚之幂，亦失之于少也。与此相似，指验半圆之弧耳。若不满半圆者，益复疏阔。宜依勾股锯圆材之术，以弧弦为锯道长，以矢为锯深，而求其径。既知圆径，则弧可割分也。割之者，半弧田之弦以为股，其矢为勾，为之求弦，即小弧之弦也。以半小弧之弦为勾，半圆径为弦，为之求股，以减半径，其余即小弧之矢也。割之又割，使至极细。但举弦矢相乘之数，则必近密率矣。然于算数差繁，必欲有所寻究也。若但度田，取其大数，旧术为约耳[1]。

如图10.1，刘徽通过二分弧、四分弧、八分弧，……，逐求弓形内系列等腰三角形的面积，以这些三角形的面积和逼近弓形面积。刘徽指出："但举弦矢相乘之数，则必近密率矣。"就是说每个三角形的面积都是以弦 a_i 与矢 h_i 的乘积的一半，即 $S_{\Delta i}=a_ih_i/2$，则弓形面积为

---

〔1〕 九章算术·方田[A].郭书春主编.中国科学技术典籍通汇·数学卷[Z].第1册.郑州：河南教育出版社，1993：110.

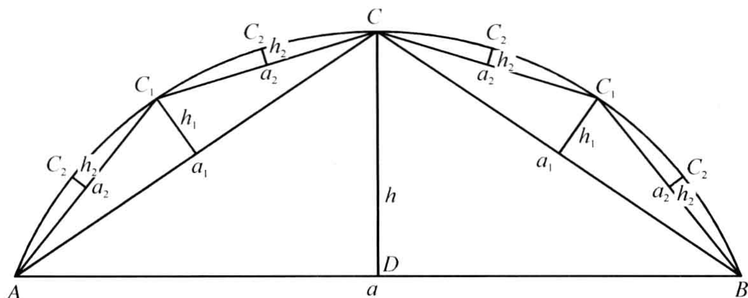


图 10.1

$$S=\sum_{i=0}^{\infty}S_{\Delta i}=\sum_{i=0}^{\infty}2^{i}\left(\frac{a_{i}h_{i}}{2}\right) \tag{10.1}$$

三上义夫曾经对“但举弦矢相乘之数，则必近密率矣”这句注文进行了诠释，认为这是中国古代数学中最早出现的无穷级数[1]。这样的解释是有一定的道理的。

在阳马术注中，刘徽揭示并证明了四面体体积理论。对于长、宽、高分别为 a, b, h 的多面体，《九章算术》给出了阳马的体积公式

$$V_{\mathrm{y}}=\frac{1}{3}abh \tag{10.2}$$

和鳖臑的体积公式

$$V_{\mathrm{b}}=\frac{1}{6}abh \tag{10.3}$$

对于 $a=b=h$ 的特殊情形，由于一个正方体可以分解成为三个全等的阳马，或六个三三全等、两两对称的鳖臑，这样的关系容易用棋验法加以证明。但是，当 $a\neq b\neq h$ 时，则如刘徽注文所说，“鳖臑殊形”，“阳马异体”，那么，用棋验法“则难为之矣”。为证明式(10.2)和式(10.3)，刘徽首先提出一条原理：把一个堑堵分解为一个阳马和一个鳖臑，则“阳马居二，鳖臑居一，不易之率也。”即在每个堑堵中，恒有

$$V_{\mathrm{y}}:V_{\mathrm{b}}=2:1 \tag{10.4}$$

---

〔1〕 三上義夫. 関孝和の業績と京阪算家並に支那の算法との関係及び比較[J]. 東洋学報. 1932 (22)：94.

的关系成立。由于堑堵体积是 $V_{\mathrm{q}}=\frac{1}{2}abh$，只要证明了式(10.4)的这条原理，那么式(10.2)和式(10.3)的正确性则可知。对于式(10.4)，刘徽以无穷分割的方式证明如下：

用长、宽、高都等于一个单位[1]的黑色鳖臑(如图 10.2(a))与红色阳马(如图 10.2(b))，可拼成一个堑堵(如图 10.2(c))，用三个互相垂直的平面分别平分堑堵的长、宽、高，那么，其中的阳马被分割成一个小立方体 $QMNF-HKLI$(立方体Ⅰ)，两个小堑堵 $EPMQ-HK$，$MOCN-LK$，两个小阳马 $HKLI-B$，$PDOM-K$；鳖臑被分割成两个小堑堵 $GJPE-HK$，$GJKH-AR$，与两个小鳖臑 $JPD-K$，$RHK-B$。显然，阳马中的两个小堑堵 $EPMQ-HK$ 和 $MOCN-LK$ 拼成一个小立方体(立方体Ⅱ)，鳖臑中的两个小堑堵 $GJPE-HK$ 和 $GJKH-AR$ 拼成一个全等的小立方体(立方体Ⅲ)，而小阳马 $HKLI-B$ 和小鳖臑 $RHK-B$、小阳马 $PDOM-K$ 和小鳖臑 $JPD-K$ 分别拼成两个小堑堵(如图 10.2(e))，进而可以拼成第四个全等的小立方体(立方体Ⅳ)，而且图 10.2(e)的图形结构与图 10.2(c)是相

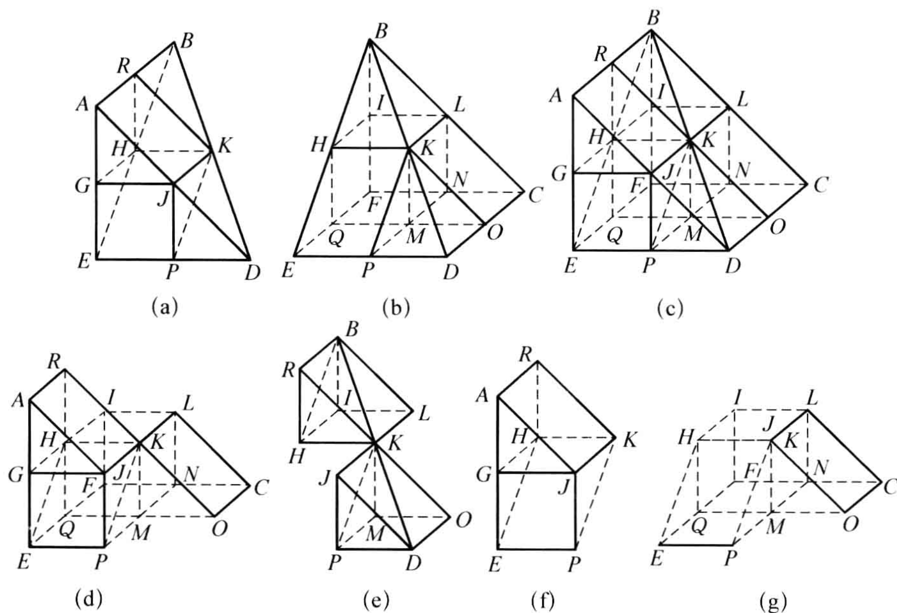


图 10.2

[1] 刘徽指出，对于长、宽、高不等的立体，原理也是一样的。

似的。在小立方体Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ中，属于阳马的和属于鳖臑的体积的比是 2：1，所谓“别种而方者率居三”，即在原堑堵(图 10.2(c))的 $\frac{3}{4}$ 中，式(10.4)成立，而在第四个小立方体Ⅳ中，式(10.4)是否成立待证，即在原堑堵的 $\frac{1}{4}$ 中，式(10.4)有待证明。然而其中两小堑堵的结构和原堑堵完全相似(图 10.2(e))，即所谓“通其体而方者率居一”。显然，上述分割过程完全可以继续在剩余的两个小堑堵中施行，又可以证明在其中的 $\frac{3}{4}$ 中，式(10.4)成立，在其中的 $\frac{1}{4}$ 中仍不知道。换句话说，证明了式(10.4)在原堑堵的 $\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}$ 中成立，而在 $\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}$ 中还不知道。这个过程可以无限继续下去，第 n 次分割只剩下原堑堵的 $\frac{1}{4^n}$ 中式(10.4)没有被证明，显然 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{4^n}=0$，即所谓“半之弥少，其余弥细。至细曰微，微则无形，由是言之，安取余哉?”就是在整个堑堵中证明了式(10.4)。如果以代数方式表示刘徽的证明过程，则设原阳马体积为 V_{y}，原鳖臑体积为 V_{b}，第一次分割后的小阳马体积为 V_{y_1}，小鳖臑体积为 V_{b_1}，小堑堵体积为 V_{q_1}，小立方体积为 V_{l_1}，第二次分割后的小阳马体积为 V_{y_2}，小鳖臑体积为 V_{b_2}，小堑堵体积为 V_{q_2}，小立方体积为 V_{l_2}，第 k 次分割后的小阳马体积为 V_{y_k}，小鳖臑体积为 V_{b_k}，小堑堵体积为 V_{q_k}，小立方体积为 V_{l_k}，于是有以下关系：

$$V_{\mathrm{y}}=2V_{\mathrm{l}_1}+2V_{\mathrm{y}_1},\ V_{\mathrm{b}}=V_{\mathrm{l}_1}+2V_{\mathrm{b}_1}$$

同理，$V_{\mathrm{y}_k}=2V_{\mathrm{l}_{k+1}}+2V_{\mathrm{y}_{k+1}}$，$V_{\mathrm{b}_k}=V_{\mathrm{l}_{k+1}}+2V_{\mathrm{b}_{k+1}}$

而且，

$$V_{\mathrm{l}_2}=\frac{1}{8}V_{\mathrm{l}_1},\ V_{\mathrm{l}_3}=\frac{1}{8}V_{\mathrm{l}_2}=\frac{1}{8^2}V_{\mathrm{l}_1},\ \cdots,\ V_{\mathrm{l}_k}=\frac{1}{8}V_{\mathrm{l}_{k-1}}=\cdots=\frac{1}{8^{k-1}}V_{\mathrm{l}_1}$$

于是，$V_{\mathrm{y}}=2V_{\mathrm{l}_1}+2^2V_{\mathrm{l}_2}+2^3V_{\mathrm{l}_3}+\cdots+2^kV_{\mathrm{l}_k}+\cdots$

$$=2V_{\mathrm{l}_1}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\cdots+\frac{1}{4^k}+\cdots\right)$$

$$V_{\mathrm{b}}=V_{\mathrm{l}_1}+2V_{\mathrm{l}_2}+2^2V_{\mathrm{l}_3}+\cdots+2^{k-1}V_{\mathrm{l}_k}+\cdots$$

$$= V_{1_1}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\cdots+\frac{1}{4^k}+\cdots\right)$$

比较两个级数的对应项，可以发现都是 2∶1 的关系。

刘徽对阳马术的注文非常晦涩难懂，三上义夫最初给出了准确的解释[1]，后来 Wagner 也给出同样解释[2]。

刘徽不仅用无穷分割的方式证明了今天中国数学史界所谓的“刘徽原理”，而且进一步指出：

> 数而求穷之者，谓以情推，不用筹算。鳖臑之物，不同器用。阳马之形，或随修短广狭。然不有鳖臑，无以审阳马之数，不有阳马，无以知锥亭之类，功实之主也[3]。

其所谓的“然不有鳖臑，无以审阳马之数，不有阳马，无以知锥亭之类，功实之主也”，表明他认识到，多面体体积理论应该建立在阳马、鳖臑的基础之上，也就是说，四面体(鳖臑)的体积计算是整个多面体体积理论的基础，而四面体体积的计算必须建立在无穷小分割的基础之上，这种思想与现代数学中的体积理论是一致的，也就是所谓的希尔伯特(David Hilbert，1862～1943)23 问题中的第三问题：四面体体积的解决不借助无穷小分割是不可能的。而对于无穷小计算，刘徽指出：“数而求穷之者，谓以情推，不用筹算”，意味着对于无穷过程的极限值不可能用“筹算”计算出来，而是通过归纳或数学直觉的“情推”获得。事实上，在近代微积分语言乃至魏尔斯特拉斯(Weierstrass，1815～1897)的算术语言建立之前，极限的计算恐怕也只能借助“情推”，这也反映了东方人在处理无穷问题时不会陷入西方人那样的逻辑矛盾，更有利于建立微积分算法，这从后面几节介绍的和算家的无穷小算法中可以看出。

继刘徽之后，祖冲之、祖暅父子在无穷小分析领域有过重要业绩，因其著作《缀术》失传，今不得其详，目前仅李淳风(602～670)在《隋书·历律志》

---

〔1〕 三上義夫. 関孝和の業績と京阪算家並に支那の算法との関係及び比較[J]. 東洋学報，1932(22)：69－74.

〔2〕 Wagner. An Early Chinese Derivation of the Volume of a Pyramid：Liu Hui，Third century A. D. [J]. Wagner. D. B. Historia Mathematica，1979(6)：164－188.

〔3〕 九章算术·商功[A]. 郭书春主编. 中国科学技术典籍通汇·数学卷[Z]. 第 1 册. 郑州：河南教育出版社，1993.

记载了祖冲之计算出的圆周率数值，但没有记录其计算过程以及他在体积计算方面的成就。李淳风在注《九章算术》时，又记录了祖暅在刘徽的工作基础上推证球体积公式的过程。

刘徽首先明确指出《九章算术》所给的球体积公式是错误的，其错误的原因在于误以为球和它的外切圆柱的体积的比是 π∶4。他用球的两个外切圆柱体正交，将其公共部分称做“牟合方盖”，刘徽指出球和外切牟合方盖的体积的比才是 π∶4。因此，只要求出牟合方盖的体积，那么球体积便迎刃而解。但刘徽功亏一篑，未能求出牟合方盖的体积，表示“敢不阙疑，以俟能言者”。祖暅深入研究了球的外切正方体中用两个正交圆柱切割出牟合方盖后的剩余部分，他考虑这剩余部分的八分之一，在正方体内而在牟合方盖外的部分被切割成了三块，叫做外三棋。如图 10.3 所示，小立方体 $ABCD-EFGH$ 是立方体的八分之一，边长为 a，立方体的边长为 $2a$，内棋 $ABCD-H$ 是牟合方盖的八分之一。$ABE-H$ 是外棋一，$BCG-H$ 是外棋二，$EFGH-B$ 是外棋三。

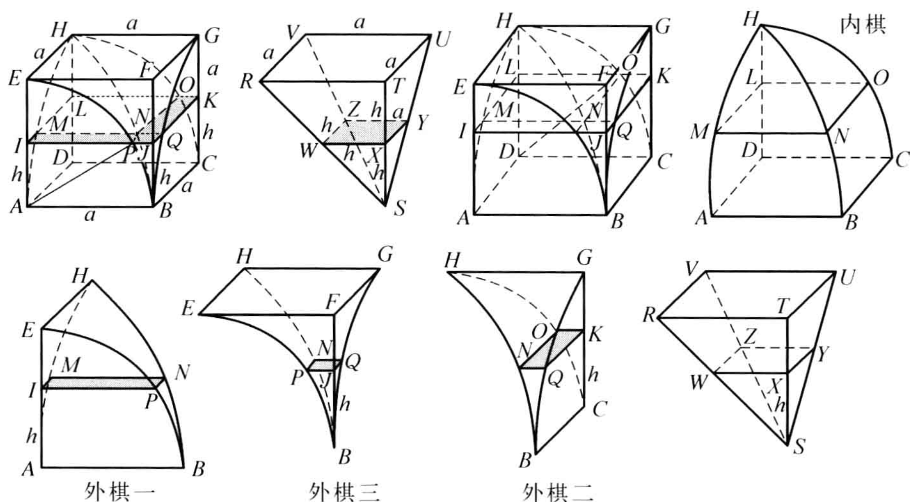


图 10.3

祖暅以高度为 h 的平面截这些图形，发现这些横断面积具有以下关系：

内棋的横断面积＝小立方的横断面积－外三棋的横断面积之和

即
$$S_{\square LMNO}=S_{\square LIJK}-(S_{\square IPNM}+S_{\square NQKO}+S_{\square PJQN})$$

即外三棋的横断面积之和为

$$S_{\square IPNM}+S_{\square NQKO}+S_{\square PJQN}=S_{\square LIJK}-S_{\square LMNO}$$
$$=(IJ)^2-(MN)^2=(AB)^2-(IP)^2$$

连接 A, P 两点,在直角$\triangle AIP$ 中,根据勾股定理,有

$$(IP)^2=(AP)^2-(AI)^2=(AP)^2-h^2$$

且 $AP=AB$, 因此,外三棋的横断面积之和为

$$S_{\square IPNM}+S_{\square NQKO}+S_{\square PJQN}=(AB)^2-(IP)^2$$
$$=(AP)^2-[(AP)^2-(AI)^2]=(AI)^2=h^2$$

也就是说,外三棋横断面积之和为横断面高度的二次幂。

祖暅联想到三纬长度都是 a 的倒立阳马图形,其横断面积也为横断面高度的二次幂,将两者进行比较,即 $S_{\square IPNM}+S_{\square NQKO}+S_{\square PJQN}=S_{\square WXYZ}$,于是,他用了一条著名的截面原理:缘幂势既同,则积不容异。断定外三棋的体积之和等于倒立阳马的体积,即

$$V_{ABE\text{-}H}+V_{BCG\text{-}H}+V_{EFGH\text{-}B}=\frac{1}{3}V_{RTUV\text{-}S}$$

而倒立阳马体积为小立方体积的 $\frac{1}{3}$,所以外三棋体积和也为小立方体积的 $\frac{1}{3}$,于是,内棋体积等于小立方体积的 $\frac{2}{3}$。由此可以推算出牟合方盖体积等于 8 倍的内棋体积,即小立方体积的 $\frac{16}{3}$,也即大立方体积的 $\frac{2}{3}$。根据刘徽已经推算的结果:

牟合方盖体积∶内切球体积$=4:\pi$

可以推算出

$$\text{球体积}=\frac{\pi}{4}\text{牟合方盖体积}=\frac{\pi}{6}\text{立方体积}$$

即

$$V=\frac{\pi}{4}\times\frac{2}{3}d^3=\frac{\pi}{6}d^3$$

祖暅解决这个问题的关键,是使用了所谓的“截面原理”,后来在欧洲也

出现并被普遍使用，称做"卡瓦列利（B. Cavalieri，1598～1647）不可分量原理"，它是微积分算法的重要基础。其实，刘徽在推证曲面体体积时也习惯使用这一原理，只是没有概括表述成原理。

10.1.2　唐、宋、元、明数学中的圆理

唐代数学创造性的成就很少，在无穷小分析方面没有留下值得注意的业绩。宋元时代代数学十分发达，但在无穷小分析领域也未出现新成果，在圆的近似计算方面，沈括创立了会圆术以解决求弧长问题，弥补了《九章算术》的不足，秦九韶使用了 $\pi=\sqrt{10}$ 这一新的圆周率，其他算书混用古法圆率、刘徽新术与冲之密率等汉唐时代的圆周率。

招差法、弧矢割圆术是元代《授时历》的五项发明中最重要的两项数学发明。在黄道度数和赤道度数的换算中，《授时历》使用了弧矢割圆术，并且在计算太阳的去极度和黄道上各点距离赤道的距离，和赤道上各点距离黄道的距离，以及计算白道和赤道的交点距离春分点或秋分点的距离时，也都用到弧矢割圆术。计算过程中，《授时历》取圆周率的近似值为 3，虽与弧矢割圆术的公式误差抵消一部分〔1〕，但取如此粗略的圆周率，从数学上说，总归不能满意，《授时历》这部分内容对关孝和的圆理研究有很大的影响，他用招差法求弧长，以及用增约术求圆周率，主要是为了解决这一历学中的数学问题，而《隋书 · 律历志》关于祖冲之圆周率的记录，也刺激着和算家们的圆理研究〔2〕。

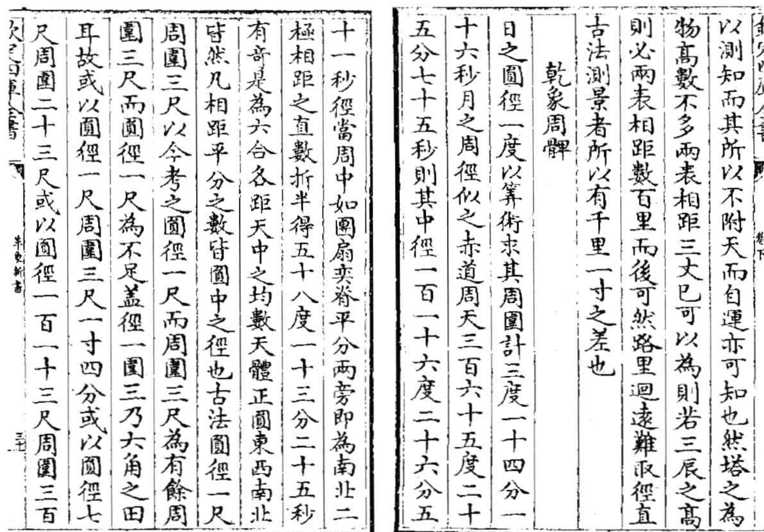
割圆术也曾再次详于元代赵友钦的《革象新书》（1281），为了下文说明和算中的割圆术与赵友钦割圆术的关系，兹录《革象新书》下卷"乾象周髀"（见图 10.4）条之下的割圆术术文如下：

> 日之圆径一度，以算术求其周围，计三度一十四分一十六秒，……今求日周天径即其法也。试画纸为方圆图，如棋秤百眼，每眼广一寸，横十寸，名勾，相距于东西，纵十寸名股，相距于南北，斜十四寸有奇，名弦，相距在四角之交，乃即方圆之内画为圆图，而去其方之四角。圆径

---

〔1〕 关于这一问题的深入研究，请参见杉本敏夫的系列论文，或其论文集：解読関孝和——天才の思考過程[C]. 東京：海鸥社，2008.

〔2〕 参见本书第 9 章相关内容。


以測知而其所以不附天而自運亦可知也然塔之為物高數不多兩表相距三丈已可以為則若三辰之高則必兩表相距數百里而後可然路里迴遠難取徑直古法測景者所以有千里一寸之差也

乾象周髀

日之圓徑一度以筭術求其周圍計三度一十四分一十六秒月之周徑似之赤道周天三百六十五度二十五分七十五秒則其中徑一百一十六度二十六分五十一秒徑當周中如圓扇夾脊平分兩旁即為南北二極相距之直數折半得五十八度一十三分二十五秒有奇是為六合各距天中之均數天體正圓東西南北皆然凡相距平分之數皆圓中之徑也古法圓徑一尺周圍三尺以今考之圓徑一尺而周圍三尺為有餘周圍三尺而圓徑一尺為不足蓋徑一圍三乃六角之田耳故或以圓徑一尺周圍三尺一寸四分或以圓徑七尺周圍二十二尺或以圓徑一百一十三尺周圍三百

图 10.4　赵友钦《革象新书》卷下“乾象周髀”

十寸与外方之股数相同，而圆径名周髀矣。圆之髀比方之股，其数相同，特方圆有异耳。别就圆图之内画小方图，其小方四角斜抵东西南北之四正，在坎、离、震、兑之位，而外大方四角在乾、坤、艮、巽之位也。小方四角斜弦十寸，尚是圆中之髀，其数不殊于外方之股，以外方而比内方包容之积相半，外方积百寸，内方积五十寸，盖以外方均作四隅而视之，则半归于内、半出于外也。于是，知圆中之直髀即内方之斜弦，内方既用为弦，圆中难以名股，勾股与弦名不可紊，故称髀以别之也。……今圆方而纵横相同，当以弦幂均为勾股两幂，各得五十寸，而开方即知勾股皆七寸有余，考究圆围，本原于此。乃别用薄纸剪圆临于方图之上，摹小方之广，以算术展为圆象，充满圆图。自四角之方增为八角曲圆，为第一次，乃第二次则求为曲十六，第三次则求为曲三十二，第四次则求为曲六十四，加一次则曲必倍，至十二次则为曲十万六千三百八十四，其初小方渐加、渐展、渐满、渐实，角数愈多而为方者不复方，渐变为圆矣。故自一二次求至十二次，精密已极，若复节节求之，虽千万次而无终穷，……以十二次曲数一万六千三百八十四乘之，得三千一百四十一寸五分九厘二毫有奇，则千寸径之周围也。置此周围之数，降呼为三尺一寸四分一厘五毫九丝二忽有奇，而以一百一十三乘之果得三百五

十五尺，此其为法，所以极精密也。大抵方为数之始，圆为数之终。圆终于方、方终于圆，《周髀》之术无出于此矣[1]。

赵友钦从圆内接正四边形开始进行加倍割圆，获得圆周率为3.141 592。《革象新书》(图 10.4)在明代被不断刊刻，流传甚广，曾于朝鲜李朝中宗时期传入朝鲜，对朝鲜的天文历学产生一定的影响[2]。明末清初该书也曾传入日本，但传入的确切时间难考，日本的内阁文库、静嘉堂等图书馆都藏有该书的明刊本。村松茂清与关孝和的割圆术都类似于赵友钦的做法，从圆内接正四边形开始进行割圆。值得注意的是，《革象新书》把正四边形、正八边形等称做四角、八角等，这一称法为和算家所继承，在和算中正多边形被称作角形，大概是受《革象新书》的影响。另外需要注意的，在被认为是关孝和青年时代作品的《规矩要明算法》[3]中，关孝和把割圆术称作"环矩术"。"环矩"这一术语来源于《周髀算经》，即所谓"环矩以为圆"，而割圆术出现于《革象新书》下卷之" 乾象周髀"一节，是赵友钦出于对《周髀算经》所载"商高曰：数之法出于圆方，圆出于方，方出于矩，矩出于九九八十一"的解释，在其割圆术之后，他特别强调"圆终于方、方终于圆，《周髀》之术无出于此矣。"所以，关孝和称割圆术为环矩术，也可能受《革象新书》的影响。

明代算书虽对割圆术多有描述，且对弓形计算问题多有记载，但没有出现用割圆术进行实际的无穷小计算的数学家。1552 年顾应祥撰《弧矢算术》一卷，该书为中国第一部有关弧矢讨论的专著，书中含"弧矢论说"及"方圆论说"两篇，"弧矢论说"(图 10.5)给出了有关弧矢的各项定义及互求法，说明了弧矢和圆径的相互关系，给出了计算弧矢的理论依据，并将弧矢术与勾股术相类比，得出计算公式。"方圆论说"是一篇对方率(即方五斜七)和圆周率的讨论。这些内容后来又为《算法统宗》所收[4]。周述学在其《神道大编历宗算会》(1558)中对圆及弧

---

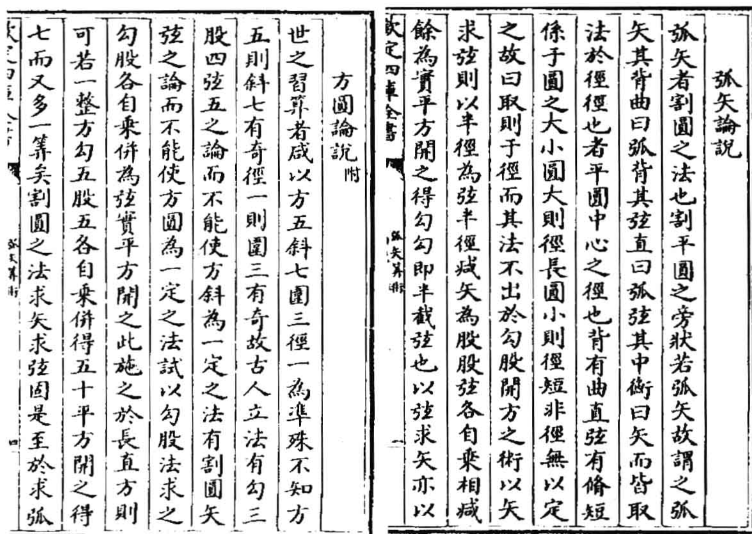
[1] 赵友钦. 革象新书[M]. 四库全书本.

[2] 冯立昇. 中日数学关系史[M]. 济南：山东教育出版社，2009：139.

[3] 《规矩要明算法》有两种抄本，一本收藏于日本东北大学图书馆，一本收藏于学士院图书馆，这两抄本都未署作者与时间，根据高桥织之助的《算话拾穫集》(1811 年，抄本)的记述，认为它是关孝和青年时代的著作，著作时间被认为是 1663 年。但高桥织之助所说的根据在哪，并不清楚，所以和算史界尚存疑问。

[4] 程大位著，梅荣照、李兆华校释. 算法统宗[M]. 合肥：安徽教育出版社，1990：264.

的计算问题也有讨论，其卷六论平圆，卷七、卷八论弧矢问题[1]。



弧矢論說

弧矢者割圓之法也割平圓之旁狀若弧矢故謂之弧矢其背曲曰弧背其弦直曰弧弦其中衡曰矢而皆取法於徑徑也者平圓中心之徑也背有曲直弦有脩短係于圓之大小圓大則徑長圓小則徑短非徑無以定之故曰取則于徑而其法不出於勾股開方之術以矢求弦則以半徑為弦半徑減矢為股股弦各自乘相減餘為實平方開之得勾勾即半截弦也以弦求矢亦以

方圓論說附

世之習筭者咸以方五斜七圍三徑一為準殊不知方五則斜七有奇徑一則圍三有奇故古人立法有勾三股四弦五之論而不能使方斜為一定之法有割圓矢弦之論而不能使方圓為一定之法試以勾股法求之勾股各自乘併為弦實平方開之此施之於長直方則可若一整方勾五股五各自乘併得五十平方開之得七而又多一筭矣割圓之法求矢求弦固是至於求弧

图 10.5　顾应祥的“弧矢论说”与“方圆论说”

明代的《算法统宗》、《详明算法》、《数学通轨》、《九章算法比类大全》等书中的有关各类几何形体度量计算的经验公式以及弧矢论方面的知识，对和算圆理影响较大。

10.2　江户初期的圆理

目前发现最早的和算书是《算用记》(作者不详，1620)，自此至关孝和的数学研究工作之前，我们姑称之为江户初期。受《算学启蒙》、《杨辉算法》以及以《算法统宗》为代表的明代算书中相关内容的影响，这段时期和算圆理算法基本上都是近似公式，属于经验计算阶段，其圆理内容主要包括：① 圆周率；② 各类几何形体的度量(弧长、面积、体积)；③ 无穷分割法——碎抹术(削片法)。

江户初期的和算家不满意明代算书中圆周率常取 3 的数值，普遍采用 3.16(即$\sqrt{10}$的近似值)或其相近值，从今村知商的《竖亥录》(1639)开始，普

[1] 周述学. 神道大编历宗算会[A]. 续修四库全书(1043 子部·天文算法类)[Z]. 上海：上海古籍出版社，1995：646.

遍采用 $p=\sqrt{a^2+(\pi^2-4)h^2}$ 的弧长公式，此公式比沈括的会圆术近似程度要好[1]。对于这个弧长公式与圆周率的来源，和算史界一般认为是今村知商独立创造的，不过也有学者认为可能通过佛典来源于印度[2]。现将关孝和圆理研究工作之前一些主要的和算书记载的圆周率和圆弧计算情况列表如下[3][4]（记圆直径 d，弦 a，矢 h，弧长 p，弓形面积 A）：

著　　作	圆周率	弧长公式	弓形面积公式
《算用记》（作者不详，1620）	3.16		
《割算书》（毛利重能，1622）	3.16，3.2		
《諸勘分物》（百川治兵衛，1622）	3.2		
《尘劫记》（吉田光由，1627）	3.16		
《竖亥录》（今村知商，1639）	3.162	$p^2=\left(d+\frac{h}{2}\right)4h$	$A=\frac{pd}{4}-\frac{1}{2}a\left(\frac{d}{2}-h\right)$
《新刊算法记》（田原嘉明，1652）	3.16		
《参两录》（榎並和澄，1653）	3.162		
《圆方四卷记》（初坂重春，1657）	3.162	$p^2=a^2+6h^2$	$A=\frac{pd}{4}-\frac{1}{2}a\left(\frac{d}{2}-h\right)$
《格致算书》（柴村盛之，1657）	3.162	$p^2=a^2+6h^2$	$A=\frac{pd}{4}-\frac{1}{2}a\left(\frac{d}{2}-h\right)$
《算法阙疑抄》（礒村吉德，1659）	3.162，3.141 6		
《竖亥录假名抄》（安藤有益，1662）	3.162		
《算俎》（村松茂清，1663）	3.141 592 648 7	$p^2=a^2+5.860\,9h^2$	$A=\frac{pd}{4}-\frac{1}{2}a\left(\frac{d}{2}-h\right)$
《童介抄》（野泽定长，1664）	3.14	$h=\frac{1}{3}\left[\sqrt{(d-h)^2+\frac{3}{2}p^2}-(d-h)\right]$	

〔1〕 徐泽林.《竖亥录》中的圆型平面图形问题[A]. 数学史研究文集[C]. 第三辑，呼和浩特：内蒙古大学出版社、台北：九章出版社，1993：152 - 158.

〔2〕 林隆夫. インドの数学[M]. 東京：中央公論社，1993.

〔3〕 戸谷清一. 江戸時代初期の数学書における円に関する定数について[J]. 数学史研究，1980(87).

〔4〕 下平和夫. 江户初期の弧矢弦の公式について[J]. 数学史研究，1978，77(4)：20.

（续　表）

著　　作	圆周率	弧长公式	弓形面积公式
《算法根源记》（佐藤正兴，1666）	3.142		$A=\frac{\pi}{4}\left[0.8(a-2h)+2h\right]h$
《方圆秘见集》（多贺谷经贞，1667）	3.16		
《算法明备》（冈岛友清，1668）	3.162	$p^2=a^2+6h^2$	
《古今算法记》（泽口一之，1671）	3.16		
《算法直解》（樋口兼次，1671）		$(pa)^2-5.872h^2a^2-a^4=0$	
《算法勿憚改》（村瀨義益，1673）	3.1415	$p^2=a^2+5.8695056h^2$	
《算法至源記》（前田憲舒，1673）	3.1428		
《玉円極積》（古郡氏解，1696）	3.1416613		
《具応算法》（三宅賢隆，1699）	3.1415928		

江户初期的和算家对几何求积问题表现出极大的热情，这也是和算圆理发达的主要原因。在江户初期的和算书中，出现的平面图形有：方（正方形）、直（长方形）、勾股（直角三角形）、圭（等腰三角形）、梭（即菱形）、三斜（不等边三角形）、三角（正三角形）、四斜（不等边四边形）、梯（或称作萧、墙，即梯形）、箭翎（或称作箭筈）、鼓（或称作腰鼓、三广）、曲尺、幞头、抹角、圆、环、弧、覆月、火塘、钱、带直圆（又称作纵横圆）、侧圆（即椭圆）、扇、车辋、榄（两个全等的弓形合成的对称图形）、锭、眉、畹背等，其中大部分来源于中国算书，而带直圆、侧圆等图形是和算所特有的。

和算书中出现的立体图形有：立方、方堡垮、直堡垮、方锥、直锥、方台、直台、楔（又称作榨）、两刃楔、荞麦（又称作菽麦形、莜麦形，即正四面体）、切笼（又称作切子，即用平面截去正多面体的角所得到的立体图形）、方台斜截、直台斜截、圆堡垮、圆锥、圆台、球（称作玉或立圆）、长立圆（即椭圆绕其长轴旋转的旋转体）、矮立圆（即椭圆绕其短轴旋转的旋转体）、玉阙（又称作球欠，即球冠）、卵（即圆柱两端接半球）、带堡圆、圆截笼、圆环、圆垮斜截、圆台斜截、球欠直截、球欠斜截、十字环、球觅积（又称作玉皮，即球表面积）、球

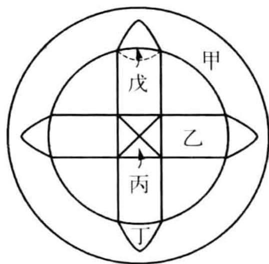


图 10.6　和算中的十字环问题

欠顶觅积（即球冠表面积）等。在这些立体图形中，曲面体立体比中国算书的图形要丰富得多，其中十字环问题最为独特（图 10.6），它最初出现于榎並和澄（Enami Tomosumi，生卒年不详）的《参两录》（1653），山田正重（Yamada Masasige）的《改算记》（1659）给出近似计算结果，前田宪舒（Maeda Kenzyo，生卒年不详）的《算法至源记》（1673）复原了《改算记》中的计算方法，但是误差较大，村濑义益（Murase Yoshimasu，生卒年不详）的《算法勿惮改》（1673）中也有记载。关孝和在《求积》中给出了一种新的求解方法[1]，这个立体的求积比较复杂，需要用重积分方法，关孝和之后，直至幕末，和算家一直没有停止对这个问题的探讨，有马赖徸的《拾玑算法》（1766）第五卷第 148 问、安岛直圆的《十字环真术》（1794）、坂部广胖（Sakabe Kohan，1759～1824）的《点窜指南录》（1810）、内田久命（Uchida Kyumei，？～1868）的《求积通考》（1844）、斋藤宜义（Sato Nobuyoshi，1816～1889）的《算法圆理鉴》（1834）、家崎善之（Iesaki Yoshiyuki，生卒年不详）的《五明算法》（1826）、堀池久道（Horiike Hisamichi，生卒年不详）的《揭楣算法》（1836）等书中都有这类问题。早期都用算术方法求近似的体积，安岛直圆之后开始用积分法求解，《算法圆理鉴》与《求积通考》使用圆理豁术进行计算。

在江户初期的和算书中，还出现了中国算书所没有的，求圆台截周（椭圆周）、畹背[2]（阿基米德螺线）等特殊曲线的计算问题。这些问题最早出现于《算法阙疑抄》，其来源至今尚不明。

江户初期的圆理内容中最值得注意的是几何求积中无穷分割法的使用，在平面图形中称作碎抹术，在立体图形中称作削片法，后来笼统称作碎抹。这种方法是定积分算法与微分算法的思想萌芽。

---

〔1〕 杉本敏夫教授对关孝和的《求积》有系列研究，参见：杉本敏夫. 解読関孝和——天才の思考過程[C]. 東京：海鸥社，2008.

〔2〕《算法阙疑抄》的遗题第 41 问，称之为倶利伽罗卷，关孝和称之为畹背，用增约术给出计算公式，建部贤弘在《大成算经》中将其图形解释成“承湾准规”，也使用关孝和的方法求解。1798 年，安岛直圆著《湾背解术》，用积分方法求解。



图 10.7 《算法阙疑抄》中的分割圆法

《算法阙疑抄》(礒村吉德,1659,如图 10.7[1])卷三首次对割圆术进行了描述,他把圆每幅一尺、长五寸地如阿弥陀的笼子一样割成 31 片,其中有一个隙缝宽度是六分二厘,将它们平展成矩形,以此来说明圆周率的近似值。他指出在正方形内构造正八边形,在正八边形内构造正十六边形,逐如此,最后构造出正 31 072 边形,反复应用勾股定理,可以计算出 π = 3.141 59。在计算球表面积时,他认为可以如同切分柑橘皮一样,把各切片拼成矩形,这样可以近似求出球表面积(如图 10.8)。

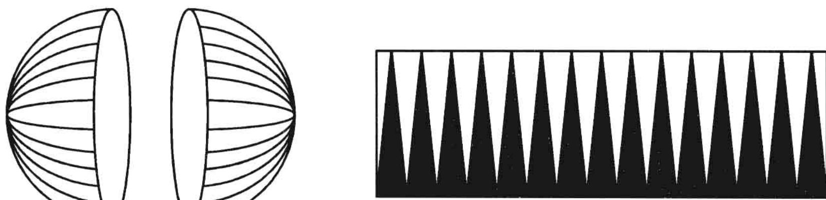


图 10.8 《算法阙疑抄》求球表面积的柑橘皮分割法

村松茂清在《算俎》(1663)中首次进行割圆术的实际演算,他从正方形起割圆,割至 2^{15} 边形(图 10.9),得到 π = 3.141 592 648 777 698 869 248。村松茂清将此数值与中国古代的圆周率进行了比较,指出:

圆术,和汉有种种之说,故邪正有之。东汉蔡氏[2]者,作径一时周三之法,是为古法之率,古人久用此法。晋之孟氏[3]、魏之刘徽云径一而周三一四,宋之胡氏[4],用径一而周三一四三二余也,宋之祖冲之者再改圆率,究径一而周三一四二八五七余,自此,后世用此法,然冲之之

[1] 礒村吉德. 算法闕疑抄[M]. 卷三. 東北大学図書館藤原文庫,第 3647 号.
[2] 指蔡邕。
[3] 孟氏,似指孟喜。
[4] 胡氏指谁,不详。

术本源以何理而作不知，近此图，一毫六丝舍，不背离三一四[1]。

这表明中国《隋书·律历志》关于圆周率的记载，对他有一定的影响。

在求球体积方面，《算俎》（图 10.9）指出：

> 球率者事繁，难委细记之。如平圆，将串一尺之球，（削成）几片薄片为各圆台，叠其坪数[2]，作寸坪五百二十四之定法也。[3]

采用后来和算家所称的“削片”法（图 10.10），用平行截面将球切成 100 片近似圆台的切片，叠加这些切片积而获得球体积近似公式，这是积分方法的萌芽。

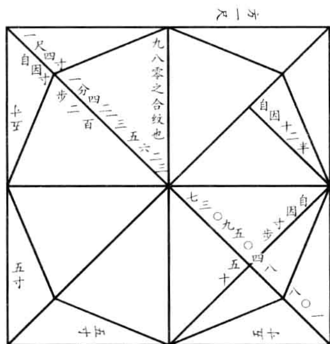


图 10.9　《算俎》中的碎抹术

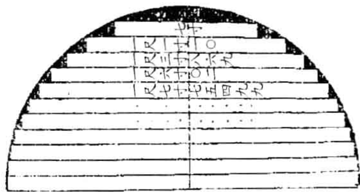


图 10.10　《改算记纲目》中的削片法

1684 年版的《增补算法阙疑抄》在此基础上加以细密化，进一步割至 2^{17} 边形，得到 π 的 10 位精确值，并且将球切分 1 万片，把村松茂清的球积公式 $V_{球} = 0.524d^3$ 推进为 $V_{球} = 0.523\ 6d^3$。同时，该书作者以两个同心球体积差与半径差的比率作为球表面积的近似，出现微分方法的萌芽。

江户初期关于圆和球的分割方法及其微积分思想后来在关孝和、建部贤弘以及松永良弼的圆理算法中都得到了继承与发挥。

10.3　关孝和的圆理研究

为解答《算法阙疑抄》、《算法勿惮改》等书遗题中的求积问题，关孝和对

---

〔1〕 村松茂清. 算俎[A]. 卷四. 徐泽林. 和算选粹补编[C]. 北京：北京科学技术出版社，2009：183.

〔2〕 球直径称作“串”，坪数，即球体积。坪，乃日本的土地面积单位，三十六平方尺的面积为一坪。又作土石方之体积单位，六尺见方的正方体体积为一坪。

〔3〕 村松茂清. 算俎[A]. 卷五. 徐泽林. 和算选粹补编[C]. 北京：北京科学技术出版社，2009：219.

圆理研究投入了大量精力，其研究成果散见于《规矩要明算法》、《阙疑抄答术》[1]、《勿惮改答术》[2]、《毬阙变形草解》、《解见题之法》、《求积》和《括要算法》等书中。其中包括圆、弓形、球、球冠、椭圆、圆台与圆锥、截台与截锥、十字环、畹背等，他开始用代数的方式考虑几何求积问题，在几何求积方面，他的算法都超越了江户初期的和算家。由于关孝和对圆理创造性的研究，使圆理问题成为和算的中心课题，《括要算法》开始将求圆周率、求弧长、求球体积、求球冠体积作为圆理的中心课题，这些内容又收入《大成算经》，该书卷十二是关于圆理的内容，包括：圆率、弧率、立圆率、球缺率四部分。"圆率"部分的内容与《缀术算经》一致，"弧率"的内容与《括要算法》中求弧率方法一致，仅插值多项式不一样，应该是建部所改造的公式，"立圆率、球缺率"的内容与《括要算法》一致。在安岛直圆以前，和算家的圆理研究主要集中在上述这些方面。

1）计算圆周率

关孝和用一遍增约术计算 $\pi \approx 3.141\,592\,653\,589\,793\,\underline{247\,6}$（精确到小数点后 16 位），最后取 3.141 592 653 59 为定周。详细计算过程在本书第 9 章已经论述，这里不再重复。自此之后，和算家计算圆周率愈趋精密，主要结果如下：

①《圆理发起》（蜂谷定章，1728）

$$\pi^2 = 8\left(1+\frac{1}{6}+\frac{1\cdot 4}{6\cdot 15}+\frac{1\cdot 4\cdot 9}{6\cdot 15\cdot 28}+\cdots\right) \tag{10.5}$$

②《方圆算经》（松永良弼，1739）

$$\pi^2 = 9\left(1+\frac{1^2}{3\cdot 4}+\frac{1^2\cdot 2^2}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}+\frac{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}+\cdots\right) \tag{10.6}$$

$$\pi = 3\left(1+\frac{1^2}{4\cdot 6}+\frac{1^2\cdot 3^2}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12\cdot 12}+\cdots\right) \tag{10.7}$$

③《算法点窜指南录》（坂部广胖，1810）

$$\pi = 4\left(1-\frac{1}{5}-\frac{1\cdot 4}{5\cdot 7\cdot 9}-\frac{1\cdot 3\cdot 4\cdot 6}{5\cdot 7\cdot 9\cdot 11\cdot 13}-\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 4\cdot 6\cdot 8}{5\cdot 7\cdot 9\cdot 11\cdot 13\cdot 15\cdot 17}-\cdots\right) \tag{10.8}$$

---

〔1〕 原抄本藏于宫内省图书寮，署"关孝和编"。

〔2〕 又名《勿惮改一百问之答术》，为抄本，署"关孝和编"。另有《大成算经续录、勿惮改答术》的抄本，署"关自由亭先生著述，山路主住订"，内容大致相同。

④《新弧圆解》(川井久德,1823)

$$\pi = 2\left(1 + \frac{1^2}{3!} + \frac{1^2 \cdot 3^2}{5!} + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{7!} + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2}{9!} + \cdots\right) \quad (10.9)$$

$$\frac{\pi}{4} = \frac{2}{3} + \frac{2}{2 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 3}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} + \cdots \quad (10.10)$$

⑤《算法新书》(长谷川宽阅，千叶胤秀编,1830)

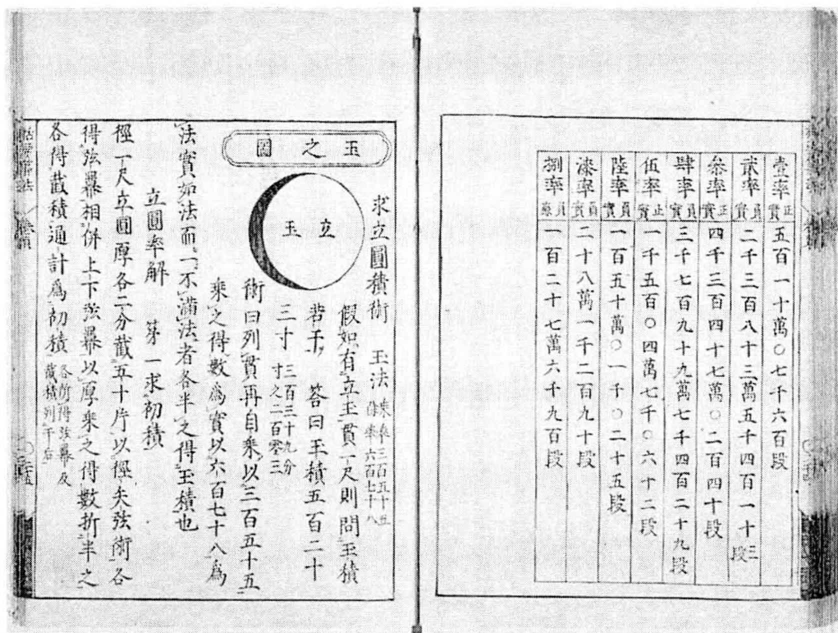
$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{6 \cdot 5} - \frac{1 \cdot 2}{6 \cdot 5 \cdot 7} - \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} - \cdots \quad (10.11)$$

松永良弼(1692? ～1744)计算到小数点后 51 位,为和算家计算圆周率的最高纪录。

2）求弧长

关孝和创造性把插值方法应用于弧长计算,其详细计算过程见于本书第 4 章,这里不再重述。他的这种做法引导建部贤弘将弧长展为矢的幂级数。

3）求球体积


率	正负	数
壹率	實正	五百一十萬〇七千六百段
貳率	實負	二千三百八十三萬五千四百一十三段
叁率	實正	四千三百四十七萬〇二百四十段
肆率	實負	三千七百九十九萬七千四百二十九段
伍率	實正	一千五百〇四萬七千〇六十二段
陸率	實負	一百五十萬〇一千〇二十五段
漆率	實負	二十八萬一千二百九十段
捌率	實負	一百二十七萬六千九百段

玉之圖

立玉

求立圓積術　玉法 率三百五十五 六百七十八

假如有立玉徑一尺則問玉積若干　荅曰玉積五百二十三寸 三百三十九分寸之二百零三

術曰列實再自乘以三百五十五乘之得數爲實以六百七十八爲法實如法而一不滿法者各半之得玉積也

立圓率解　第一求初積

徑一尺立圓厚各二分截五十片以徑失弦術各得弦冪相併上下弦冪以厚乘之得數折半之各得截積通計爲初積 各所得弦冪及截積列于左

图 10.11　《括要算法》中的求立圆术

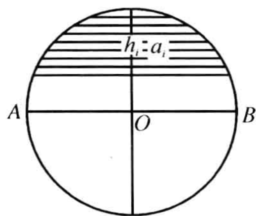


图 10.12　关孝和计算球体积

《括要算法》(图 10.11)中,关孝和用碎抹术将球的直径分别为 50,100,200 等分(图10.12),根据径矢弦术求出各弦的幂 a_i^2,当分割 50 片时,$\frac{D}{50}=\Delta D$ 进而计算出 $\frac{a_i^2+a_{i+1}^2}{2}\cdot\Delta D=v_i$,于是计算出第一次约积 $V_1=\sum_{i=1}^{50}v_i$,同样,计算出分割 100 片时的第二次约积 V_2、分割 200 片时的第三次约积 V_3,最后再次使用增约术

$$V=V_2+\frac{(V_2-V_1)(V_3-V_2)}{(V_2-V_1)-(V_3-V_2)} \tag{10.12}$$

求出球体积 V。

10.4　建部贤弘的圆理缀术

建部贤弘的工作使圆理算法实现了跨越,开始进入无穷级数的研究阶段,其方法和业绩记录在《缀术算经》和《圆理弧背缀术》中,其研究成果虽然比欧洲的近代数学中相应的成果要晚,但是他的独立创造,使和算以东方数学的传统进入微积分的大门。

10.4.1　《缀术算经》中的探弧术:无穷级数展开的数值方法

众所周知,以插值多项式逼近三角函数 $(\arcsin x)^2$,其近似效果与插值节点的位置选择有关,而且其幂级数展开式只有在 x 较小时才具有较快的收敛速度。关孝和与建部贤弘都认识到,以招差法获得的弧背幂的公式并不十分理想,所以他们一直没有停止在这方面的探索,不断努力加以改进。建部贤弘曾经说道:“往岁关氏改造弧率,吾亦再次改造,皆不精,其术废”[1]。关孝和改造得到的新公式未被记载下来,建部贤弘所改造的公式可从其《研几算法》(1683)中的弓形面积公式导出,其弧背计算公式应该为

---

〔1〕 建部賢弘. 綴術算經[M]. 第十二探弧術, 内閣文庫藏抄本, 23851 号.

$$24^2 \times 113^2 \times 10^2 d^3 p^2 = 5\,733\,613\,567h^5 + 16 \times 261\,217\,536h^3 d^2 + 64 \times 96\,337\,664h^2 d^3 + 256 \times 73\,573\,068hd^4 - 4 \times 183\,275\,520h^4 d - 1\,024 \times 81d^5$$

《研几算法》未详该公式的来源，《大成算经》中有类似算法，由此可知，其推演方法与关孝和用混沌招差法求弧背幂的方法并无本质区别，不同在于采用了新的插值多项式：

$$p^2 = 4dh + k_1 h^2 + k_2 \frac{(h-h_1)h^2}{(d-m_1 h)} + k_3 \frac{(h-h_1)(h-h_2)h^2}{(d-m_1 h)(d-m_2 h)} + \cdots + k_5 \frac{(h-h_1)(h-h_2)\cdots(h-h_5)h^2}{(d-m_1 h)(d-m_2 h)\cdots(d-m_5 h)} \quad (10.13)$$

而且在计算过程中，使用了累遍增约术，而关孝和仅使用一遍增约术。

使建部贤弘方法实现根本性变化的，是由于他深刻认识到，以插值多项式逼近弧背幂时，存在展开式的收敛速度问题，他在《缀术算经》中清楚指出：

> 探弧背之形质，近半圆者真数伏，近边者真数显，是依近半圆属纬，其规急也；近边属经，其规舒也。故以矢之极微者探其数而索术也[1]。
>
> 始以径一尺，碎约求矢一寸、矢二寸、矢三寸、矢四寸等之定背，续又求矢四寸五分、矢四寸九分等之定背，探其数，于近半圆者，敢不会为据者？故往岁关氏改造弧率再次，吾亦重新改造一次[2]，皆不精，而其术废。依其矢一寸之半背幂一十寸〇三强、与矢一分之半背幂一寸〇〇三三强之数，预[3]探会矢之极微者，察真数必显，求得矢一忽之半背幂之定数而探会其质[4]。

在这段文字中，所谓“探弧背之形质，近半圆者真数伏，近边者真数显，是依近半圆属纬，其规急，近边属经，其规舒也，故以矢极微而探其数、索

---

〔1〕 这段文字说明，对于用矢及弦计算弓形弧长的公式，若弓形越接近半圆，则公式误差越大，若矢相对于弦越小，则弧长公式精确性越高。

〔2〕 建部贤弘改造的公式，似乎是指由建部贤弘的《研几算法》(1683)中所载的弓形面积公式导出的公式。关氏改造两次的公式，可见《括要算法》贞卷“求弧术”给出一个求弧长的牛顿插值公式，另外一个公式不存，今不详。

〔3〕 原文作“豫”，训读为“あらかじめ”，预先、事先、事前的意思。

〔4〕 建部賢弘. 綴術算經[M]. 第十二探弧術，内閣文庫藏抄本，23851 号.

术。”意思是说，弧的特征是，越接近半圆，其精确数值潜伏，则不易获得，而越接近弦，其精确数值显而易得。所以接近半圆的情形不是正术（即所谓的纬术），其数值变化幅度大，而接近弦的情形则其数值变化慢，应该是正术（即所谓的经术）。由这一认识出发，他放弃了插值方法，从求极小矢的弧背入手，采取“探数索术”的方式构造公式。其方法主要有三个步骤，第一步、第二步的术文如下：

> 截矢一忽之弧造二斜，次截造四斜，次截造八斜，次截造一十六斜，逐如此倍截斜之数，求各截半背幂，依累遍增约之术，得定半背幂一丝〇〇〇〇〇〇三三三三三三五一一一一一二二五三九六九〇六六六六七二八二三四七七六九四七九五九五八七五强[同于碎约之法求圆周幂，但求至背之截数为六十四斜之截半背幂，以增约术究真数，得五十余位也，其截数略之][1]。

如果设圆的直径为 d，弧的弦为 a，矢为 h，弧长为 p，则建部以 $d=10$，$h=10^{-5}$ 的情形进行计算。第一步，用割圆术，把弧分别二等分、四等分、……、2^k 等分，求各等分时的截半背幂。如图 10.13，记二分弧的弦为 a_1，对应的矢为 h_1；四分弧的弦为 a_2，对应的矢为 h_2；…；2^k 分弧的弦为 a_k，对应的矢为 h_k，那么 $2^k a_k = p_k$ 为各次截背，显然，$\lim\limits_{k\to\infty} 2^k a_k = p$。使用迭代算法：$a_k^2 = h_{k-1}d$，$\left(\frac{a_k}{2}\right)^2 = (d-h_k)h_k$，可以计算出系列的 a_k 与 h_k，为省去计算过程中开方运算的繁琐，他计算各次截半背幂，即

$$\left(\frac{p_k}{2}\right)^2 = \left(\frac{2^k a_k}{2}\right)^2 = 2^{2k-2}a_k^2 \tag{10.14}$$

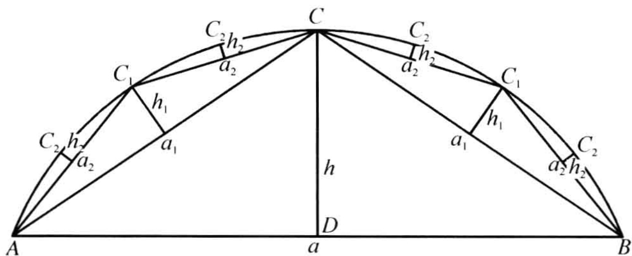


图 10.13　《缀术算经》中的探弧背术图

〔1〕 建部賢弘. 綴術算經[M]. 第十二探弧術，内閣文庫藏抄本，23851 号。

第二步，以 $\left(\frac{p_k}{2}\right)^2$ 为初始近似值序列，用累遍增约术求得定半背幂[1]：

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 = 1.000\,000\,333\,333\,511\,111\,225\,396\,906\,666\,728\,234\,776\,947\,959\,587\,5 \times 10^{-4}$$

第三步，把定半背幂的数值逐节逐节地用零约术求渐近分数[2]，以将 $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ 展开成幂级数形式。其计算过程如下：

泛半背幂[3]：$A_0 = 1 \times 10^{-4} = dh$

一定差：$A'_1 = (p/2)^2 - A_0$

$$= 0.333\,333\,511\,111\,225\,396\,906\,666\,728\,234\,776\,947\,959\,587\,5 \times 10^{-10}$$

一泛差：$A_1 = 0.333\,333 \cdots \times 10^{-10} = \frac{1}{3}h^2 = \frac{1}{3}A_0\left(\frac{h}{d}\right)$

二定差：$A'_2 = A'_1 - A_1$

$$= 0.177\,777\,892\,063\,573\,333\,394\,901\,443\,614\,626\,254\,2 \times 10^{-16}$$

二泛差：$A_2 = 0.177\,777\,777\cdots \times 10^{-16} = \frac{8h^3}{45d} = \frac{8}{15}A_1\left(\frac{h}{d}\right)$

三定差：$A'_3 = A'_2 - A_2$

$$= 0.114\,285\,795\,555\,617\,122\,665\,836\,848\,476\,4 \times 10^{-22}$$

三泛差：$A_3 = 0.114\,285\,714\,285\,714\,285\cdots \times 10^{-22}$

$$= \frac{4h^4}{35d^2} = \frac{9}{14}A_2\left(\frac{h}{d}\right)$$

逐如此，继续求出

四泛差：$\frac{128h^5}{1\,575d^3} = \frac{32}{45}A_3\left(\frac{h}{d}\right)$

五泛差：$\frac{128h^6}{2\,079d^4} = \frac{25}{33}A_4\left(\frac{h}{d}\right)$

六泛差：$\frac{1\,024h^7}{21\,021d^5} = \frac{72}{91}A_5\left(\frac{h}{d}\right)$

---

〔1〕 方法见本书第 9 章。
〔2〕 方法见本书第 7 章。
〔3〕 泛、定，是中国传统历算术语，泛数指初步的近似值，定数指最后确定的更精确的近似值。

于是获得展开式：

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 = A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + \cdots$$

$$= dh + \frac{1}{3}h^2 + \frac{8}{45}\left(\frac{h^3}{d}\right) + \frac{4}{35}\left(\frac{h^4}{d^2}\right) + \frac{128}{1\,575}\left(\frac{h^5}{d^3}\right) + \frac{128}{2\,079}\left(\frac{h^6}{d^4}\right) + \cdots \quad (10.15)$$

这一公式相当于

$$\frac{1}{2}\ (\arcsin x)^2 = \frac{1}{2!}x^2 + \frac{2^2}{4!}x^4 + \frac{2^2 \cdot 4^2}{6!}x^6 + \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2}{8!}x^8 + \cdots \quad (10.16)$$

在《缀术算经》(1722)(如图 10.14)成书 15 年后的 1737 年，在欧洲由 Leonhard Euler(1707～1783)与 Johann Bernoulli(1667～1748)分别再次获得。

四汎差	四定差	三汎差	三定差	二汎差	二定差	一汎差	一定差	汎背冪	定背冪
○○	○○	七○	七○	七○	五○	参○	九○	乙	九乙
八絲	八絲	乙絲	九絲	七絲	七絲	参絲	○絲	絲	○絲
乙○	乙○	四○	五○	七○	参○	参○	六○		六○
二○	二○	二○	五○	七○	参○	参○	六○		六○
六○	六○	八○	五○	七○	参○	参○	六○		六○
九○	九○	五○	五○	七○	参○	参○	六○		六○
八○	九○	七○	六○	七○	参○	参○	七○		七○
四○	○○	乙○	乙○	七○	九○	参○	二○		二○
乙○	二○	四○	七○	七○	四○	参参	八参		八参
二○	八○	二○	乙○	七○	九○	参参	二参		二参
六●	参●	八●	二●	七●	○●	参参	参参		参参
九○	七○	五○	参○	七○	乙○	参参	四参		四参
八○	九○	七○	六○	七○	四○	参参	七参		七参
四○	五○	乙○	六○	七○	四○	参参	七参		七参
乙○	乙○	四○	五○	七乙	参乙	参参	六五		六五
二○	五○	二○	八○	七七	六七	参参	九乙		九乙
六○	五○	八○	参○	七七	乙七	参参	四乙		四乙
九○	乙○	五○	六○	七七	四七	参参	七乙		七乙
八○	乙○	七○	八○	七七	六七	参参	九乙		九乙
四○	参○	乙○	四○	七七	二七	参参	五乙		五乙
乙●	四●	四乙	八乙	七七	六八	参参	九二		九二
二○	乙○	二乙	四乙	七七	二九	参参	五二		五二
六○	九○	八四	七四	七七	五二	参参	八五		八五
九○	○○	五二	六二	七七	四○	参参	七参		七参
八○	七○	七八	四八	八七	二六	参参	五九		五九
強○	強○	強五	強五	弱七	強参	強参	強六		強六

三除シテ得ル數ヲ五汎差トス用テ五定差ヲ減シ
テ餘ヲ六定差トス
六定差ヲ視ルニ五汎差ノ首位ヨリ六位下レル
ニ依テ五汎差ニ矢ヲ乘シ徑ニ除シテ六差ヲ
可求ヿヲ探ル卽五汎差ニ矢ヲ乘シ徑ニ除シ
得ル所ヲ以テ六定差ヲ約メテ七分九一二○九
四三七三六三強ヲ得ル零約ノ術ヲ以テ七十
二乘九十一除ノ極限ナルヿヲ探リ索ム
五汎差ヲ置矢ヲ乘シ徑ニ除シ亦七十二乘九十
一除シテ得ル數ヲ六汎差トス

图 10.14　《缀术算经》中的探弧术

建部贤弘成功地将弧背幂展开成矢的无穷级数的原因，不仅是由于他认识到弧长幂函数的收敛速度问题，而且也因为他采用了实现其算法的科学手段——累遍增约术与零约术，定半背幂的精度直接影响展开的结果，正是由于建部贤弘科学地使用了 Romberg 算法，才十分经济有效地获得了定

半背幂的 50 位精确值，保证了第三步零约过程中无穷级数系数的规律性的显现，也保证了展开式的收敛。

事实上，建部贤弘开始并未意识到展开式系数的规律性，没有选择 Taylor 展开式的形式，同时在实际的天文历算中，求弧长的场合，矢未必很小，因此上述级数式(10. 15)未必收敛，也就是说，级数表示式(10. 15)是理论的，并不实用。这一点从他的《算历杂考》可以看出。该书有"求背探术"一节，用上述《缀术算经》中的探弧术方法求出定半背幂之后，他用零约术构造了如下两个有限形式的公式[1]：

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 = dh + \frac{1}{3}h^2 + \left(\frac{1}{3}h^2\right)\frac{h}{(d-9h/14)}\frac{8}{15} \tag{10.17}$$

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 = dh + \frac{1}{3}h^2 + \frac{8}{45}\frac{h^3}{d-h} - \frac{5}{14}\frac{h^4}{(d-h)(d-13h/15)} \tag{10.18}$$

在历算中使用这两个非无穷形式的近似公式，说明建部贤弘在公式构造上还受《大成算经》中的插值多项式形式的束缚。直到 1728 年，蜂屋定章(Hachiya Sadaaki，1686～1749)的《圆理发起》才对级数式(10. 15)的系数规律性有了清晰的认识，该书将级数式(10. 15)概括为

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 = dh + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{2(2k+1)(k+1)}A_k\left(\frac{h}{d}\right) \tag{10.19}$$

10. 4. 2　《圆理弧背术》中的开方缀术：无穷级数展开的代数方法

建部贤弘的创造改变了和算圆理的数学性质，解析方法从此成为圆理算法的核心。虽然《缀术算经》中的级数展开法具有机械性的算法特点，但这种利用高位数值分析来展开级数比较烦琐。因此，必须寻求较为简单的展开法。继《缀术算经》之后，《圆理弧背术》(无作者与年代)[2]与《圆理乾坤之卷》(抄本，未署作者与年代，据传为松永良弼时代著作)首先

---

〔1〕 建部賢弘. 算暦雑考，见：佐藤健一著. 建部賢弘の「算暦雑考」[M]. 東京：研成社，1995.

〔2〕 此书为本多利明的手抄本，藏于东北大学图书馆林文库，内题"圆理弧背术，名曰缀术，建不休先生撰"，书末有书志记载道："此书建不休先生之制作也。其向授时历之起源详解[举世曰建部之六卷状]，撰著之时，制作圆周率之密法，而秘藏于殊者，乃此书也。余师兼庭授之，复重宝矣。余再授之，而为至宝至宝秘藏焉。本多利明谨志"。

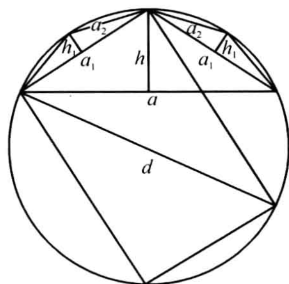


图 10.15　圆理弧背术

作出改变。

如图 10.15，记原弦为 a，原矢为 h，弧长为 p，2^k分弧之弦为 a_k，对应的矢为 h_k，从求分弧矢 h_k入手，由射影定理得 $h_1^2-dh_1+\frac{dh}{4}=0$，利用增乘开方法获得等价于 Newton 二项展开式的幂级数：

$$h_1=\frac{h}{4}+\frac{h^2}{16d}+\frac{h^3}{32d^2}+\frac{5h^4}{256d^3}+\frac{7h^5}{512d^4}+\frac{21h^6}{2\,048d^5}+\cdots$$

同理，$h_k^2-dh_k+\frac{dh_{k-1}}{4}=0$，利用此公式作迭代演算，以求

$$h_k=\frac{h_{k-1}}{4}+\frac{h_{k-1}^2}{16d}+\frac{h_{k-1}^3}{32d^2}+\frac{5h_{k-1}^4}{256d^3}+\frac{7h_{k-1}^5}{512d^4}+\frac{21h_{k-1}^6}{2\,048d^5}+\cdots \quad (10.20)$$

而获得 h_k的系列展开式

$$h_1=\frac{h}{4}+\frac{h^2}{16d}+\frac{h^3}{32d^2}+\frac{5h^4}{256d^3}+\frac{7h^5}{512d^4}+\frac{21h^6}{2\,048d^5}+\cdots$$

$$h_2=\frac{h}{16}+\frac{5h^2}{256d}+\frac{21h^3}{2\,048d^2}+\frac{429h^4}{65\,536d^3}+\frac{2\,431h^5}{524\,288d^4}+\frac{29\,393h^6}{8\,388\,608d^5}+\cdots$$

$$h_3=\frac{h}{64}+\frac{21h^2}{4\,096d}+\frac{357h^3}{131\,072d^2}+\frac{29\,325h^4}{16\,777\,216d^3}+\frac{666\,655h^5}{536\,870\,912d^4}+\frac{32\,302\,465h^6}{34\,359\,738\,368d^5}+\cdots$$

$$h_4=\frac{h}{256}+\frac{85h^2}{65\,536d}+\frac{5\,795h^3}{8\,388\,608d^2}+\frac{1\,907\,213h^4}{4\,294\,967\,296d^3}+\frac{173\,556\,383h^5}{549\,755\,813\,888d^4}+\frac{33\,644\,160\,449h^6}{140\,737\,488\,355\,328d^5}+\cdots$$

$$h_5=\frac{h}{1\,024}+\frac{341h^2}{1\,048\,576d}+\frac{93\,093h^3}{536\,870\,912d^2}+\frac{122\,550\,285h^4}{1\,099\,511\,627\,776d^3}+\frac{44\,616\,473\,759h^5}{562\,949\,953\,421\,312d^4}+\frac{34\,610\,215\,507\,777h^6}{576\,460\,752\,303\,423\,488d^5}+\cdots$$

事实上，建部贤弘没有逐一计算 h_i 的各级系数，而是通过观察与归纳获得的。随后求泛半背幂：

置原矢，以径乘之，为二斜面幂；以半斜数幂[一]乘之，得原泛半背幂。置甲矢，以径乘之，为四斜面幂；以半斜数幂[四]乘之，得甲泛半背幂。置乙矢，以径乘之，为八斜面幂；以半斜数幂[十六]乘之，得乙泛半背幂。逐如此求各泛半背幂[1]。

	元数	一差	二差	三差	四差	五差
原泛半背幂	0	0	0	0	0	0
甲泛半背幂	dh	$\frac{h^2}{4}$	$\frac{h^3}{8d}$	$\frac{5h^4}{64d^2}$	$\frac{7h^5}{128d^3}$	$\frac{21h^6}{512d^4}$
乙泛半背幂	dh	$\frac{5h^2}{16}$	$\frac{21h^3}{128d}$	$\frac{429h^4}{4\,096d^2}$	$\frac{2\,431h^5}{32\,768d^3}$	$\frac{29\,393h^6}{524\,288d^4}$
丙泛半背幂	dh	$\frac{21h^2}{64}$	$\frac{357h^3}{2\,048d}$	$\frac{29\,325h^4}{262\,144d^2}$	$\frac{666\,655h^5}{8\,388\,608d^3}$	$\frac{32\,302\,465h^6}{526\,870\,912d^4}$
丁泛半背幂	dh	$\frac{85h^2}{256}$	$\frac{5\,795h^3}{32\,768d}$	$\frac{1\,907\,213h^4}{16\,777\,216d^2}$	$\frac{173\,556\,383h^5}{2\,147\,483\,648d^3}$	$\frac{33\,644\,160\,449h^6}{549\,755\,813\,888d^4}$
戊泛半背幂	dh	$\frac{341h^2}{1\,024}$	$\frac{93\,093h^3}{524\,288d}$	$\frac{122\,550\,285h^4}{1\,073\,742\,824d^2}$	$\frac{44\,616\,473\,759h^5}{549\,755\,813\,888d^3}$	$\frac{34\,610\,215\,507\,777h^6}{562\,949\,953\,421\,312d^4}$
…	…	…	…	…	…	…

即 $\left(\frac{p_k}{2}\right)^2 = 2^{2k-2}dh_{k-1} = dh + \frac{p_{1,k}}{q_{1,k}}h^2 + \frac{p_{2,k}}{q_{2,k}}\frac{h^3}{d} + \cdots + \frac{p_{i,k}}{q_{i,k}}\frac{h^{i+1}}{d^{i-1}} + \cdots$

将系数 $\frac{p_{i,k}}{q_{i,k}}$ 化成小数 $\theta_{i,k}$，并且根据零约术，求出极限 $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{p_{i,k}}{q_{i,k}} = \frac{p_i}{q_i}$，得到各差乘除率 p_i，q_i。例如，一差系数系列依次为 $\frac{1}{4}$，$\frac{5}{16}$，$\frac{21}{64}$，$\frac{85}{256}$，$\frac{341}{1\,024}$，…将它们化成小数，依次为

$$\frac{1}{4} = 0.25,\ \frac{5}{16} = 0.312\,5,\ \frac{21}{64} = 0.328\,125,\ \frac{85}{256} = 0.332\,031\,25,$$

$$\frac{341}{1\,024} = 0.333\,007\,812\,5,\ \cdots$$

该数列极限为 0.333 333 333…，用零约术可得 $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{p_{1,k}}{q_{1,k}} = \frac{p_1}{q_1} = \frac{1}{3}$，即得一差乘率 $p_1 = 1$，一差除率 $q_1 = 3$。

〔1〕 建部賢弘. 円理弧背術[M]. 東北大学図書館林文庫藏抄本。

同样，将二差系数系列化成小数系列如下：

0.125，0.164 062 5，0.174 364 062 5，…，0.177 777 565 850 15，…

其极限为 0.177 777 77…，用零约术可得 $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{p_{2,k}}{q_{2,k}}=\frac{p_2}{q_2}=\frac{8}{45}$，即得二差乘率 $p_2=8$，二差除率 $q_2=45$。

将三差系数系列化成小数系列如下：

0.078 125，0.104 736 328 12，0.111 865 997 314 4，…，0.114 285 565 936 4，…

其极限为 0.114 285 7…，用零约术可得 $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{p_{3,k}}{q_{3,k}}=\frac{p_3}{q_3}=\frac{4}{35}$，即得三差乘率 $p_3=4$，三差除率 $q_3=35$。

逐如此计算下去，以确定各差乘除率 p_i，q_i。

事实上，因为

$$\left(\frac{p_{k+1}}{2}\right)^2=2^{2k}a_{k+1}^2=2^{2k}h_k d\to\left(\frac{p}{2}\right)^2 \qquad (10.21)$$

所以，

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\left(\frac{p_k}{2}\right)^2&=\lim_{k\to\infty}2^{2k-2}dh_{k-1}\\&=dh+\lim_{k\to\infty}\frac{p_{1,k}}{q_{1,k}}h^2+\lim_{k\to\infty}\frac{p_{2,k}}{q_{2,k}}\frac{h^3}{d}+\cdots+\lim_{k\to\infty}\frac{p_{i,k}}{q_{i,k}}\frac{h^{i+1}}{d^{i-1}}+\cdots\end{aligned}$$

即得

$$\begin{aligned}\left(\frac{p}{2}\right)^2&=dh+\frac{p_1}{q_1}h^2+\frac{p_2}{q_2}\frac{h^3}{d}+\cdots+\frac{p_i}{q_i}\frac{h^{i+1}}{d^{i-1}}+\cdots\\&=dh+\frac{1}{3}h^2+\frac{8}{45}\frac{h^3}{d}+\frac{4}{35}\frac{h^4}{d^2}+\frac{128}{1\,575}\frac{h^5}{d^3}+\cdots\end{aligned} \qquad (10.22)$$

《圆理弧背术》中的这一展开结果与《缀术算经》中的公式相同，《圆理乾坤之卷》中的展开方式与此基本一致，只是个别地方作了进一步的改进，并借助旁书法归纳出系数的通项公式：

$$p_{k+1}^2=4dh+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{2(r^2\cdot 2^{2k}-1)}{2^{2k}(2r+1)(r+1)}A_{r-1}\left(\frac{h}{d}\right) \qquad (10.23)$$

后来的和算家称《圆理弧背缀术》与《圆理乾坤之卷》中的以二项展开为中心的级数展开法为圆理缀术。这种展开法比诸《缀术算经》有两点进步：其一，采用 Newton 的二项展开式 $(a^n-x)^{\frac{1}{n}}$，即后来和算家所称的“开方缀术”[1]进行级数展开，以开方代数运算与无穷级数的迭代运算取代了高位复杂的数值分析，实现了圆理算法的代数化；其二，引入极限方法取代了以前的零约术，确立了圆理的分析基础。

关于《圆理弧背缀术》与《圆理乾坤之卷》两书的作者问题，一直是和算史上无法考证的谜团。《明治前日本数学史》认为前者是建部贤弘的作品[2]，后者则经过了松永良弼的加工[3]。因为久留岛义太的《弧矢弦》的内容很多与《圆理乾坤之卷》一致，所以加藤平左卫门（Kato Heizaemon，1891～1976）认为，按照久留岛的个性，不会抄袭《圆理乾坤之卷》，该展开法应为久留岛所创，其好友松永良弼将此法整理加工而形成《圆理乾坤之卷》[4]。从代数展开法的演进顺序上看，两书理应是介于《缀术算经》与松永良弼《方圆算经》之间的作品，是伴随着点窜术代数方法的普及而形成的。由此可以认为，和算圆理的级数展开方法的形成是一个渐次的过程。《圆理弧背缀术》与《圆理乾坤之卷》中级数展开法的代数化，为圆理进一步发展提供了广阔的前景。建部贤弘之后，松永良弼与久留岛义太的数学工作使圆理获得新的发展。

10.4.3　求球觅积与球体积：微分思想与积分思想

和算家称球表面积为觅积，建部贤弘在《缀术算经》中指出，关孝和将球视为顶点在圆心、高为半径的圆锥而求球表面积。《缀术算经》第八“探求球面积术”，探讨求球表面积的问题。建部贤弘使用的方法就是关孝和的“削片法”，他求出直径分别为 $d_i=1+\Delta_i\quad(i=1,2,3)$ 球的体积 V_i 和 $d_0=1$ 的球的体积 V_0，即在 $\Delta_1=0.001$，$\Delta_2=0.000\,01$，$\Delta_3=0.000\,000\,1$ 三种情形

---

[1] 建部贤弘在《圆理弧背缀术》中称之为“皈除求商术”，主要是指数为 2 的二项式展开。关于一般形式的二项展开式，是由松永良弼在《算法缀术草》给出的，后来安岛直圆推广至有理数指数的二项式展开，幕末和算书《算法缀术捷法》有系统的推演方法。其算法基础是中国传统数学中的开方术，当然，实现其算法的关键因素是旁书法的应用。

[2] 学士院编. 明治前日本数学史[M]，第二卷. 岩波書店，1956：318.

[3] 学士院编. 明治前日本数学史[M]，第二卷. 岩波書店，1956：455.

[4] 加藤平左衛門. 偉大なる和算家久留島義太[M]. 東京：槇書店，1973：33.

下求各个球体积 V_i，再分别求其与 V_0 的差（即其所谓的片实积）$W_i = V_i - V_0(i=1, 2, 3)$，再以内外两球所夹厚度即片厚 $h_i = \frac{1}{2}(d_i - d_0)$ 去除，得到片面积：

$$S_{m,i} = \frac{W_i}{h_i} = \frac{V_i - V_0}{\frac{1}{2}(d_i - d_0)} \tag{10.24}$$

也就是说，如果球直径为 d，其内同心球直径 d_1，径差 $d-d_1=2x$，求得

$$d_1^3 = (d-2x)^3 \Rightarrow d^3 - d_1^3 = x(6d^2 - 12xd + 8x^2)$$

本质上是将觅积 S_m 看成是内外球积差 $\frac{\pi}{6}(d^3 - d_1^3)$ 对 x 的微分，即

$$S_m = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\pi}{6}(d^3 - d_1^3)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\pi}{6}(6d^2 - 12xd + 8x^2) = \pi d^2 \tag{10.25}$$

建部贤弘称这一方法为“薄皮馒头法”，把直径为 1 的球看做是不含皮的馒头，h_i 看作馒头皮的厚度，体积为 V_i 的球就是含皮的馒头。事实上，建部是把球表面看成是体积对半径差的微分。

建部贤弘还介绍了另外一种求球表面积 m 的方法，将球看做由无限个无限小的锥体所形成，这些锥顶点是球心，底面是球表面的微元 Δm_i，锥高为球半径 r，球体积 V 也就是这些微锥体积 V_i 之和，比较球体积与微锥体积和之关系，即 $\frac{1}{3}mr = V = \frac{1}{6}\pi d^3$，整理得 $\frac{1}{3}m\left(\frac{1}{2}d\right) = \frac{1}{6}\pi d^3$，$\Rightarrow m = \pi d^2$。

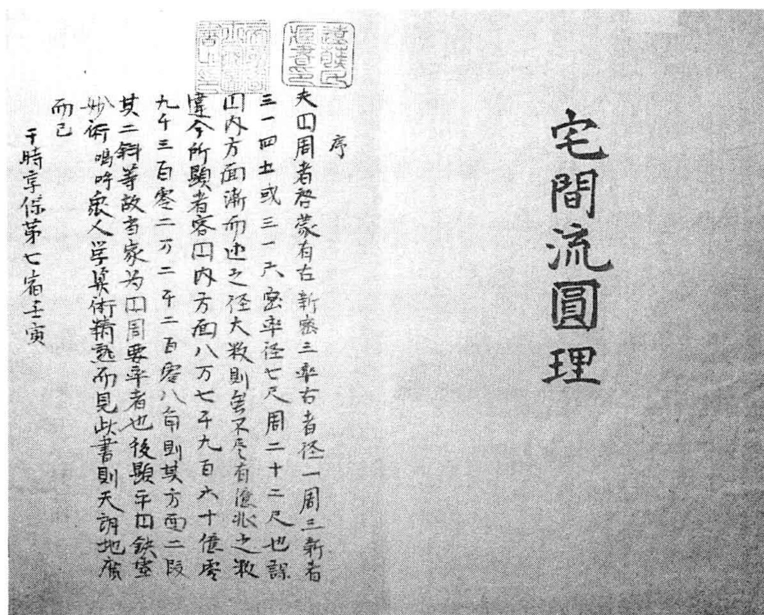
这种思想与 17 世纪著名的天文学家和数学家约翰・开普勒（Kepler，1571～1630）求圆面积和球体积思想完全一致。

10.5 宅间流的圆理研究

宅间流为关流以外比较著名的算学流派[1]，主要活动于大阪地区，该

〔1〕 该流派第二代弟子中较著名者有阿座见俊次，第三代弟子中著名者有镰田俊清，第四代中有内田源兵卫秀也较有名气，从第五代松冈良助能一开始，宅间流以大阪为学术活动中心。

流派创始人为大阪人宅间能清（Takuma Yosikiyo，生卒年不详），生活于宝永（1704～1711）年以前。宅间流数学成就中圆理研究较为独特，其法有别于关流，第三代镰田俊清（Kamada Toshikiyo，1678～1744）著《宅间流圆理》两册，以稿本形式传世（图 10.16），其著作时间与建部贤弘的《缀术算经》（1722）同年。另有题为《宅间流圆理秘术》（无署名和年代）的稿本传世，其内容是用《宅间流圆理》中的方法推演弧长的级数展开式，形式与松永良弼《方圆算经》中的“内元率”公式完全一致。


宅間流圓理

序

夫円周者啓蒙有古新密三率古者径一周三新者三一四或三一六密率径七尺周二十二尺也謂円内方面漸而述之径大数則多不尽有億兆之数寔今所顕者容円内方面八万七千九百六十億零九千三百零二万二千二百零八角則其方面二段其二斜等故古家为円周要率者也後顕乎円鉄定妙術嗚呼衆人学算術精熟而見此書則天朗地広而已

于時享保第七宿壬寅

图 10.16　学士院藏抄本《宅间流圆理》

《宅间流圆理》全书由三部分构成。第一部分计算圆周率；第二部分叙述由矢求弧的方法；第三部分叙述以招差法推导弧长的无穷级数展开式。以下介绍其圆理方法。

10.5.1　求圆周率

假设单位圆直径 $d=1$，弦为 $a=a_0$，矢 $h=h_0$，由射影定理求二分弦 a_1（名二斜，或次方），即由 $(a_1)^2=hd$，$a^2=4h(d-h)$，得

$$a_1^2=\frac{1}{2}\left(d^2-d\sqrt{d^2-a_0^2}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-a_0^2}\right)$$

书中把 a_0 称做前方，把 a_1 称做次方，直径 d 与 a_1 构成的直角三角形的另外一条直角边 b_1 称做离径（或二斜股）。显然，$b_1^2 = d^2 - a_1^2 = 1 - a_1^2$，被称做次实，其商为 $b_1 = \sqrt{1-a_1^2}$。计算 $b_1^2 = d^2 - a_1^2 = 1 - \frac{1}{2}(1-\sqrt{1-a_0^2}) = \frac{1}{2}(1+\sqrt{1-a_0^2})$，即 $a_1^2 = \frac{1}{2}(1-b_0)$，$b_1 = \frac{1}{2}(1+b_0)$。

记内接正 2^k 边形的一边（2^k 分弦）为 a_k，其对应的离径为 $b_k = \sqrt{1-a_k^2}$，则次方为 a_{k+1}，次离径为 b_{k+1}，通过以下递推关系计算各分弦与离径：

$$a_{k+1}^2 = \frac{1-b_k}{2},\ b_{k+1}^2 = \frac{1+b_k}{2}$$

镰田俊清把 b_k^2 称做 2^{k+1} 角实，把 b_k 称做 2^{k+1} 角商。从正方形出发，边数逐增倍，根据已知的数据 $a_2^2 = 0.5$，依次得到

八角实 $b_2^2 = 1 - a_2^2 = 0.5$

八角商 $b_2 = 0.707\ 106\ 781\ 186\ 547\ 514\ 400\ 844\ 362\ 104\ 849\ 039\ 284\ 835\ 937\ 688\ 474\ 036\ 588\ 398\ 689\ 953\ 662\ 392\ 310\ 535\ 194$

由 $b_{k+1}^2 = \frac{1+b_k}{2}$ 依次得到十六角实、十六角商、三十二角实、三十二角商、……一直计算到

2^{44} 角商 $b_{43} = 0.999\ 999\ 999\ 999\ 999\ 999\ 999\ 999\ 936\ 219\ 176\ 451\ 959\ 738\ 258\ 583\ 913\ 822\ 4$

从而求出 $a_{44}^2 = \frac{1-b_{43}}{2} = 10^{-25} \times 0.318\ 904\ 177\ 402\ 013\ 087\ 050\ 804\ 308\ 88$，

开方得　$a_{44} = 10^{-12} \times 0.178\ 578\ 867\ 041\ 953\ 253\ 337\ 123\ 566$

圆内接正多边形对应一个外切正多边形，内接正多边形的边长是 a，其对应的外切正多边形边长是 c，则有 $c^2 = \frac{a^2}{1-a^2}$。镰田俊清利用这一关系，逐一算出 c_k^2 与 c_k，一直算到

$$c_{44} = 10^{-12} \times 0.178\ 578\ 867\ 098\ 041\ 927\ 253\ 337\ 126\ 212\ 5$$

分别对 a_{44} 和 c_{44} 乘以正多边形的边数 2^{44}，则得到圆内接正 2^{44} 边形周长：

$$\text{内周 } \pi_1 = 3.141\ 592\ 653\ 589\ 793\ 238\ 462\ 643\ 366\ 58 < \pi$$

和外切正 2^{44} 边形周长：

$$\text{外周 } \pi_2 = 3.141\ 592\ 653\ 589\ 793\ 238\ 462\ 643\ 416\ 67 > \pi$$

将两者平均，得到均周 $\pi \approx 3.141\ 592\ 653\ 589\ 793\ 238\ 462\ 643\ 391\ 625$，并给出 π 各次幂的数值。

镰田俊清并不满足于此，他还从圆内接正六边形出发，计算出圆的内接正 6×2^{26} 边形周长，重新得到 π 的近似值：$\pi \approx 3.141\ 592\ 653\ 589\ 793\ 11$。

10.5.2　推演弧长的无穷级数展开式

已知圆直径与矢，求弧长。设弧的弦长为 a，顺次求二斜 a_2，三斜 a_3，…，m 斜 a_m，其长比 a 小。首先给出求逐斜公式：

$$\text{因法 } \lambda = \sqrt{d^2 - a^2} \div \frac{d}{2},\ a_2 = \lambda a,\ a_{n+1} = \lambda a_n - a_{n-1}$$

假设 $a_m < a < a_{m+1}$，则 a 比内接正 m 边形的边长小，这时作与 a 相等的 $m-1$ 个弦，以及比 a 小的 a_m，以构成内接多边形。

若 $a_m = a$，则 a 是内接正 $m+1$ 边形的一边，$m+1$ 就叫方等角数。

若 $a_m < a$，则把 a_m 叫做分弦，以 a_m 作为第一斜(记作 a')，再分别计算二斜 a_2'，三斜 a_3'，…，n 斜 a_n' $(a_n' < a' < a_{n-1}')$。若 $a_n' = a'$，则 a' 等于内接正 $n+1$ 边形的一边，$n+1$ 就是等方角数。

若 $a_n' < a'$，则把 $a_n' = a''$，叫做厘弦，并将其视为第一斜 a''，按照以上算法程序，依次计算出二斜 a_2''，三斜 a_3''，…，l 斜 a_l''。假设 $a_p'' < a'' < a_{l-1}''$，则 a_l'' 与 a'' 之间的差非常小，这时可认定 $a_l'' = a''$，从而 a'' 等于内接正 $l+1$ 边形的一边，故其相对应的弧长 p'' 是圆周 πd 的 $\frac{1}{l+1}$，而 $a' = a_m$ 所对应的弧长 p' 等于 $\frac{1}{n}\left[\pi d - \frac{1}{l+1}(\pi d)\right]$，那么原弦 a 所对应的弧长 p 等于

$$\frac{1}{m}\left\{\pi d - \frac{1}{n}\left[\pi d - \frac{1}{l+1}(\pi d)\right]\right\}$$

即 $$p=\frac{1}{m}\{\pi d-p'\},\ p'=\frac{1}{n}\{\pi d-p''\},\ p''=\frac{1}{l+1}\pi d$$

按照以上算法程序分别计算出 $d=10$，$a=8$ 以及 $d=10$，$a=6$ 两种情形的弧长。

随后，镰田俊清用招差法推演弧长的无穷级数展开式。设圆直径 $d=1$，给出 6 个插值节点：甲矢 $h_1=0.05$，乙矢 $h_2=0.1$，丙矢 $h_3=0.15$，丁矢 $h_4=0.2$，戊矢 $h_5=0.25$，己矢 $h_6=0.3$。

用第一部分求圆周率的演算方式，计算出各矢对应的近似弧长：

甲弧 $p_1=0.451\ 026\ 811\ 8$

乙弧 $p_2=0.643\ 501\ 108\ 79$

丙弧 $p_3=0.795\ 398\ 827$

丁弧 $p_4=0.927\ 295\ 218$

戊弧 $p_5=1.047\ 197\ 551\ 19$

己弧 $p_6=1.159\ 279\ 480\ 73$

接着，计算 $2\sqrt{h_k d}$ 与 $\frac{p_k}{2\sqrt{h_k d}}-1=p_k^{(0)}$，后者被称做元积，$\frac{p_k^{(0)}}{h_k}=p_k^{(1)}$ 被称做定积，于是计算出定积序列：

甲矢 $h_1=0.05$，　甲定积 $p_1^{(1)}=0.170\ 532\ 217\ 19$

乙矢 $h_2=0.1$，　乙定积 $p_2^{(1)}=0.174\ 645\ 903\ 11$

丙矢 $h_3=0.15$，　丙定积 $p_3^{(1)}=0.179\ 036\ 467\ 92$

丁矢 $h_4=0.2$，　丁定积 $p_4^{(1)}=0.183\ 737\ 856\ 65$

戊矢 $h_5=0.25$，　戊定积 $p_5^{(1)}=0.188\ 790\ 204\ 78$

己矢 $h_6=0.3$，　己定积 $p_6^{(1)}=0.194\ 241\ 789\ 16$

假定弧长可表示为

$$p=2\sqrt{hd}\left\{1+A_1\left(\frac{h}{d}\right)+A_2\left(\frac{h}{d}\right)^2+A_3\left(\frac{h}{d}\right)^3+\cdots+A_6\left(\frac{h}{d}\right)^6\right\}$$

接着用累裁招差法依次求出其系数：定差 A_1，平差 A_2，立差 A_3，三乘差 A_4，四乘差 A_5，五乘差 A_6。招差过程如下：

首先假定弧长满足下列插值多项式

$$p = B_1 + B_2 h + B_3 h^2 + B_4 h^3 + B_5 h^4 + B_6 h^5$$

用累裁招差法依次求出其系数：五乘差 B_6，四乘差 B_5，三乘差 B_4，立差 B_3，平差 B_2，定差 B_1。得到

$$B_6 = 0.052\,023\,786\,8, \qquad B_5 = 0.002\,251\,906\,55$$
$$B_4 = 0.035\,680\,210\,68, \qquad B_3 = 0.043\,945\,704\,642$$
$$B_2 = 0.075\,043\,156\,922\,8, \quad B_1 = 0.166\,665\,704\,732\,12$$

接着再假定

$$p = C_1 + C_2 h + C_3 h^2 + C_4 h^3 + C_5 h^4$$

由前面的五个插值点 $(h_i,\ p_i)$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$，用招差法计算出

$$C_5 = 0.020\,634\,873\,325, \qquad C_4 = 0.024\,625\,156\,005$$
$$C_3 = 0.045\,408\,873\,73, \qquad C_2 = 0.074\,954\,066\,18$$
$$C_1 = 0.166\,667\,655\,624\,673$$

因 $B_1 - C_1, B_2 - C_2, B_3 - C_3, \cdots$ 都比较小，故取平均值 $\overline{A_i} = \dfrac{B_i + C_i}{2}$，得

$$\overline{A_1} = 0.166\,666\,680\,178\,397\,5,$$
$$\overline{A_2} = 0.074\,998\,611\,551\,4,$$
$$\overline{A_3} = 0.044\,677\,289\,186,$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

利用零约术[1]，依次得到它们的近似分数

$$A_1 = \frac{1}{6} = \frac{1^2}{3!}, \quad A_2 = \frac{3}{40} = \frac{1^2 \times 3^2}{5!}, \quad A_3 = \frac{5}{112} = \frac{3^2 \times 5^2}{5!}$$

由此归纳出 A_4，A_5，A_6，…等数值，于是得到公式

[1] 方法见本书第 7 章。

$$p = 2\sqrt{hd}\left\{1+\frac{1^2}{3!}\left(\frac{h}{d}\right)+\frac{1^2\cdot 3^2}{5!}\left(\frac{h}{d}\right)^2+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{7!}\left(\frac{h}{d}\right)^3+\cdots\right\} \tag{10.26}$$

10.5.3　推演弦的无穷级数展开式

假设圆直径 $d=1$，给出 6 个插值节点：甲矢 $h_1=0.05$，乙矢 $h_2=0.1$，丙矢 $h_3=0.15$，丁矢 $h_4=0.2$，戊矢 $h_5=0.25$，己矢 $h_6=0.3$，庚矢 $h_7=0.4$，计算出各矢对应的近似弧长：

甲弧 $p_1 = 0.451\ 026\ 811\ 8$

乙弧 $p_2 = 0.643\ 501\ 108\ 79$

丙弧 $p_3 = 0.795\ 398\ 827$

丁弧 $p_4 = 0.927\ 295\ 218$

戊弧 $p_5 = 1.047\ 197\ 551\ 19$

己弧 $p_6 = 1.159\ 279\ 480\ 73$

庚弧 $p_7 = 1.369\ 438\ 486\ 01$

由 h_i 与 $d=1$，求各弧之对应弦 a_i，并分别计算

元积 $1-\dfrac{a_k}{p_k}=y_k$，限数 p_k，定积 $\dfrac{y_k}{p_k}=z_k$ $(k=1, 2, 3, 4, 5)$

假定弦长可表示为

$$a = p\left\{1-A_1\left(\frac{p}{d}\right)+A_2\left(\frac{p}{d}\right)^2-A_3\left(\frac{p}{d}\right)^3+\cdots+A_6\left(\frac{p}{d}\right)^6\right\}$$

用招差法依次求出系数：定差 A_1，平差 A_2，立差 A_3，三乘差 A_4，四乘差 A_5，五乘差 A_6，……

为此，先假定弦长满足下列插值多项式：

$$a = B_1 + B_2 p + B_3 p^2 + B_4 p^3 + B_5 p^4 + B_6 p^5 + B_7 p^6$$

用累裁招差法依次求出其系数：

六乘差 $B_7 = 0.000\ 025\ 608\ 230\ 28$

五乘差 $B_6 = 0.000\ 293\ 158\ 961\ 409\ 776\ 914\ 02$

四乘差 $B_5 = -0.000\ 810\ 435\ 001\ 861\ 3$

三乘差 $B_4 = -0.008\ 138\ 274\ 287\ 171\ 5$

立差 $B_3 = -0.000\ 193\ 361\ 882\ 972\ 8$

平差 $B_2 = 0.166\ 705\ 182\ 347\ 928\ 324\ 8$

定差 $B_1 = 0.000\ 005\ 063\ 590\ 500\ 303\ 388\ 61$

接着再假定

$$a = C_1 + C_2 p + C_3 p^2 + C_4 p^3 + C_5 p^4 + C_6 p^5$$

由前面的五个插值点(h_i, p_i)　$(i=1, 2, 3, 4, 5)$，仍用上面计算程序算出

$C_6 = 0.000\ 164\ 510\ 920\ 65$

$C_5 = 0.000\ 083\ 833\ 079\ 962\ 757\ 134\ 255$

$C_4 = 0.008\ 423\ 943\ 795\ 045\ 08$

$C_3 = 0.000\ 055\ 751\ 544\ 035\ 955\ 175$

$C_2 = 0.166\ 652\ 450\ 337\ 804$

$C_1 = 0.000\ 001\ 590\ 374\ 924$

取 B_i 与 C_i 的平均值，$\overline{A_i} = \dfrac{B_i + C_i}{2}$，依次得

$\overline{A_1} = 0.000\ 001\ 736\ 607\ 788\ 151\ 694\ 3$，

$\overline{A_2} = 0.166\ 678\ 816\ 342\ 866\ 162\ 4$

$\overline{A_3} = 0.000\ 034\ 380\ 516\ 996\ 842\ 241\ 2$，

$\overline{A_4} = 0.008\ 281\ 109\ 041\ 108\ 290$

利用零约法，依次得到 $\overline{A_i}$ 的近似分数

$$A_1 = 0,\ A_2 = \frac{1}{6} = \frac{1}{3!},\ A_3 = 0,\ A_4 = \frac{1}{120} = \frac{1}{5!}$$

由此归纳出 A_5，A_6，A_7，…等数值。即得到公式

$$a = p\left\{1 - \frac{1}{3!}\left(\frac{p}{d}\right)^2 + \frac{1}{5!}\left(\frac{p}{d}\right)^4 - \frac{1}{7!}\left(\frac{p}{d}\right)^6 + \cdots\right\} \qquad (10.27)$$

10.6 久留岛义太与松永良弼等人的圆理研究

10.6.1 久留岛义太的圆理研究

建部贤弘开拓的圆理方法为久留岛义太(Kurushima Yoshihiro，？～1757)与松永良弼(？～1744)等人所继承、充实和发展，自此开启了圆理内容的繁荣局面。久留岛义太，字喜内，号扇数或沾数，备中松山(今冈山县高梁市)人，靠自学而成为数学名家，是和算家中少有的奇才，其业绩可与关孝和、建部贤弘等人相提并论，其圆理研究成果主要反映在稿本《久氏弧背草》与《久氏遗稿》[1]中。

设圆的直径为 d，弧的矢(即其所谓的大矢)为 h，二斜矢(二分弧对应的小矢)为 h_1，久留岛义太根据射影定理，推得

$$4h_1^2-4dh_1+dh=0$$

并用开方缀术进行二项式展开，得到

$$h_1=\sum_{k=0}^{\infty}A_k,\ A_0=\frac{h}{4},\ A_k=\frac{2k-1}{2(k+1)}\left(\frac{h}{d}\right)A_{k-1} \qquad (10.28)$$

此式已见于建部贤弘的《圆理弧背术》。久留岛义太没有采用《圆理乾坤之卷》中的做法，即由迭代公式：$h_k^2-dh_k+\frac{dh_{k-1}}{4}=0$ 以及开方缀术，逐一求出各斜矢 $h_2, h_3, \cdots, h_n$ 的级数展开式，而是直接给出无穷级数

$$p^2=4hd+\frac{1}{3}A_0\left(\frac{h}{a}\right)+\frac{8}{15}A_1\left(\frac{h}{d}\right)+\frac{9}{14}A_2\left(\frac{h}{d}\right)+\cdots \qquad (10.29)$$

相当于给出半弧背幂的级数展开公式：

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2=hd\sum_{k=0}^{\infty}A_k,\ A_0=1,\ A_k=\frac{2k^2}{(k+1)[2(k+1)-1]}A_{k-1}\left(\frac{h}{d}\right) \qquad (10.30)$$

这一公式和建部贤弘在《缀术算经》中推演的公式是一样的。在《久氏

---

〔1〕《久氏遗稿》为户板保佑的《关算四传书》所收。

弧背草》的另一地方，他由

$$h_1 = \frac{1}{2}\left[d - \sqrt{d(d-h)}\right]$$

通过其所谓的“步术”：$m_1 = \frac{4d}{h} - 2m_k = m_{k-1}^2 - 2\ (k = 2, 3, 4, \cdots)$，推演出小矢的级数展开公式：$A_0 = \frac{h}{4}$，$A_k = \frac{A_{k-1}}{m_k}$，$h_1 = \sum_{k=0}^{\infty} A_k$，相当于公式：

$$h_1 = \frac{h}{4}\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\prod_{i=1}^{k}\frac{1}{m_i}\right)\right] \tag{10.31}$$

值得注意的是，久留岛义太用代数方法对式(10.29)进行了级数反演，获得了矢的级数展开式：

$$h = \frac{d}{2}\left[\frac{1}{2!}\left(\frac{p}{d}\right)^2 - \frac{1}{4!}\left(\frac{p}{d}\right)^4 + \frac{1}{6!}\left(\frac{p}{d}\right)^6 - \cdots\right] \tag{10.32}$$

这一公式在松永良弼的《方圆算经》中也出现过，不知道他们俩是谁先获得的。

在《久氏弧背草》中，久留岛义太还给出了圆周率的一个级数表达式：

$$\pi = 3\sum_{k=0}^{\infty} A_k，其中\ A_0 = 1，A_k = \frac{(2k-1)^2}{4k(4k+2)}A_{k-1}\ (公式中\ k\ 称做第数)$$

而且构造了一个由弧长求直径的独特算法(圆直径为 d，圆周长为 c)：

由 $-\frac{1}{4}\left(\frac{c}{4}\right)^2 + \left(\frac{c}{4}\right)x + x^2 = 0$，解出方程的根 x_1，

由 $-\frac{1}{4}\left(\frac{c}{4}\right)^2 + \left(\frac{c}{4} + x_1\right)x + x^2 = 0$，解出方程的根 x_2，

由 $-\frac{1}{4}\left(\frac{c}{4}\right)^2 + \left(\frac{c}{4} + x_1 + x_2\right)x + x^2 = 0$，解出方程的根 x_3，

…　…　…

如此，一直迭代下去，求出系列的方程根：x_1，x_2，x_3，…，则

$$d = \frac{c}{4} + x_1 + x_2 + x_3 + \cdots$$

久留岛没有说明其方法的构造原理，加藤平左卫门曾经以三角函数的方

式予以证明[1][2]，尽管三角函数通过明末清初汉译西学著作以及梅文鼎的著作传入了日本，并为和算家所接受，但和算家的数学研究中基本都不使用这种西方方法，所以加藤平左卫门的复原方案未必合于久留岛造术的真实思路。

久留岛对圆理研究另一主要贡献是在圆理极数术方面，这方面的内容已详于本书第 2 章，这里不再重复。

10.6.2 松永良弼的圆理研究

松永良弼，原为久留米国有马藩[3]的浪人，由于数学才能而于享保十七年(1732)受聘于磐城平藩[4]藩主内藤政树(Naitou Masaki，1703～1766)，成为内藤家的武士。根据《荒木先生茶谈》以及松永良弼授予西塚重胜(Nishitsuka Shigekatsu，生卒年不详)的免许状[5]可以知道，松永良弼曾经在江户师事关孝和的弟子荒木村英(Araki Murahide，1640～1718)。松永通过对《括要算法》的学习和研究，学力大增，他对此书的增补、订正达 120 处以上。但从学术关系上看，他似乎更像是建部贤弘的弟子。关孝和、建部的学术全部由松永继承，松永还吸收了久留岛义太的一些学术成果，对它们加以系统整理。松永去世之后，其所有的书稿都遗留给了弟子山路主住(Yamaji Nushisumi，1704～1773)。关孝和、建部贤弘等人创立的圆理算法被松永良弼进行了系统化的整理，这些圆理研究成果主要反映在其《立圆率》(1726)、《割圆十分标》(1736)、《弧矢立成法》(1736)、《太阴率》(1738)、《方圆算经》(1739)、《算法缀术草》(1740)、《方圆杂算》(时间不详)、《圆周率》(时间不详)、《算法集成》(时间不详)等书中，其中《方圆算经》和《立圆率》(1726)不仅包含一些新的无穷级数和无穷小方法，而且对后来的圆理发展产生了重要影响。

---

[1] 加藤平左衛門. 偉大なる和算家久留島義太[M]. 東京：槇書店，1973：11.

[2] 加藤平左衛門. 和算ノ研究・行列式及圓理[M]. 東京：東京開成館，1940：109.

[3] 今九州地区的福冈县境内。

[4] 今福岛县境内。

[5] 江户时代的各种学艺(包括和算)的研习与承传都是在"家元—免许"制度下进行的。这种学艺承传制度产生于江户初期，为武家社会、宗教系统、各类艺道所普遍采纳。艺道的各门派常被冠以某"家"，"家"是虚拟的"家族"单位，以师徒关系为纽结，是学艺门派的存续形式，门派内的最高组织者或学艺的权威者，被称作"家元"、"某某流道统"或"宗统传人"，很类似于匠作制度。家元与门人各有特定的权利与义务，家元对门人传授技艺，并根据其修业情况发给修业"免许状"，"免许状"相当于学力等级证书，以证明其所学门派与学力。

《方圆算经》为抄本，分为 3 卷，卷一包括圆率和弧背率，是关于弦、弧、矢等的无穷级数展开，相当于$(\arcsin x)^2$，$\arcsin x$，$\sin x$，$\cos x$ 等三角函数的幂级数展开；卷二是方率，是圆半径 R 关于圆内接正 n 边形边 a 的级数展开式以及相当于 $\csc x$，$\cot x$ 等三角函数的级数展开；卷三内容为圆充方和弧中截斜，是圆内接正 n 边形边 a 关于 n 的级数展开式等。

记圆的直径为 $d=2R$，弦为 a，弧为 p，矢为 h，弓形面积为 A，其级数展开式分别如下：

1）求圆率

首先给出周数幂：

$$(\pi d)^2 = 9d^2\left[1+\frac{1^2}{3\cdot 4}+\frac{1^2\cdot 2^2}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}+\frac{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}+\cdots\right]$$

$$= 9d^2\left\{1+2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{[(k-1)!]^2}{(2k)!}\right\} \tag{10.33}$$

再求出周数

$$\pi d = 3d\left[1+\frac{1^2}{4\cdot 6}+\frac{1^2\cdot 3^2}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12\cdot 14}+\cdots\right]$$

$$= 3d\left\{1+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{[(2k-1)!!]^2}{(4k+2)!!}\right\} \tag{10.34}$$

2）求弧背率

(1) 求背幂

$$p^2 = 4hd\left[1+\frac{2}{6}\left(\frac{h}{d}\right)+\frac{2\cdot 8}{6\cdot 15}\left(\frac{h}{d}\right)^2+\frac{2\cdot 8\cdot 18}{6\cdot 15\cdot 28}\left(\frac{h}{d}\right)^3+\cdots\right]$$

$$= 4hd\left\{1+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{[(2k)!!]^2}{(2k+2)!}\left(\frac{h}{d}\right)^k\right\} \tag{10.35}$$

(2) 求背数内元率

$$p = a\left[1+\frac{2}{3}\left(\frac{h}{d}\right)+\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\left(\frac{h}{d}\right)^2+\frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\left(\frac{h}{d}\right)^3+\cdots\right]$$

$$= a\left\{1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}\left(\frac{h}{d}\right)^k\right\} \tag{10.36}$$

(3) 求背数的中元率

$$p = 2\sqrt{hd}\left\{1 + \frac{1^2}{3!}\left(\frac{h}{d}\right) + \frac{1^2 \cdot 3^2}{5!}\left(\frac{h}{d}\right)^2 + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{7!}\left(\frac{h}{d}\right)^3 + \cdots\right\}$$

$$= 2\sqrt{hd}\left\{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[(2k-1)!!]^2}{(2k+1)!}\left(\frac{h}{d}\right)^k\right\} \tag{10.37}$$

(4) 求背数的外元率

$$p = \frac{4hd}{a}\left\{1 - \frac{1}{3}\left(\frac{h}{d}\right) - \frac{2}{3 \cdot 5}\left(\frac{h}{d}\right)^2 - \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5 \cdot 7}\left(\frac{h}{d}\right)^3 - \cdots\right\}$$

$$= \frac{4hd}{a}\left[1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-2)!!}{(2k+1)!!}\left(\frac{h}{d}\right)^k\right] \tag{10.38}$$

3) 求矢

$$h = \frac{p^2}{4d}\left\{1 - \frac{1}{3 \cdot 4}\left(\frac{p}{d}\right)^2 + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}\left(\frac{p}{d}\right)^4 - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}\left(\frac{p}{d}\right)^6 + \cdots\right\}$$

$$= \frac{p^2}{4d}\left[1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+2)!}\left(\frac{p}{d}\right)^{2k}\right] \tag{10.39}$$

4) 求弦

$$a = p\left\{1 - \frac{1}{3!}\left(\frac{p}{d}\right)^2 + \frac{1}{5!}\left(\frac{p}{d}\right)^4 - \frac{1}{7!}\left(\frac{p}{d}\right)^6 + \cdots\right\}$$

$$= p\left\{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\left(\frac{p}{d}\right)^{2k}\right\} \tag{10.40}$$

5) 求积

$$A = \frac{2}{3}ah\left\{1 + \frac{1}{5}\left(\frac{h}{d}\right) + \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 7}\left(\frac{h}{d}\right)^2 + \frac{2^2 \cdot 3 \cdot 4}{5 \cdot 7 \cdot 9}\left(\frac{h}{d}\right)^3 + \cdots\right\}$$

$$= ah\left\{\frac{2}{3} + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k+2)!!}{(2k+3)!!}\left(\frac{h}{d}\right)^k\right\} \tag{10.41}$$

《方圆算经》没有记录这 9 个圆理公式的推演过程及其相互关系，由于当时已经建立了无穷级数的开方、乘除、反演等代数运算方法，故这 9 个公式之间可能存在以下关系：对式(10.33)使用开方缀术，便得到式(10.34)；对式(10.35)使用开方缀术就得到式(10.37)，也可由式(10.36)得到式(10.37)；可由式(10.35)除以式(10.36)，得到式(10.38)；对式(10.35)进行无穷级数反演，可求得其反函数式(10.39)；对式(10.36)进行无穷级数反演可得式

(10.40)。

以下是方理的内容，也就是所谓的“方理缀术”(也属于角术)，即正多边形的公式，方率主要是角中径、平中径、距面斜弦等关于角数、边长以及距数的级数展开。为计算方便，多边形边数多取 $n=6t$。正多边形的边数称作角数，外接圆半径称作角中径，内切圆的半径称作平中径，对角线称作距面斜弦。记角数为 n，正多边形的边长(或面)为 a，角中径为 R，外接圆直径为 d，平中径为 r，距 m 面斜弦为 a_m，距 m 面斜矢为 h_m(如图 10.17)。

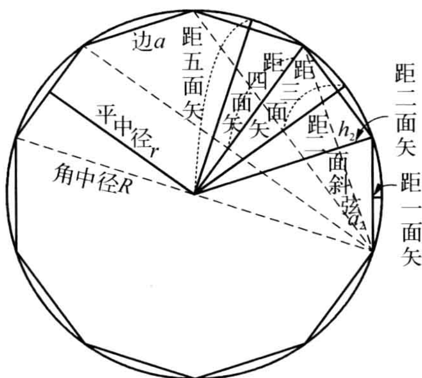


图 10.17　《方圆算经》中的方理图

1) 求方率

(1) 求角中径幂

$$R^2=\frac{n^2a^2}{36}-\frac{2(n^2-36)}{4!\cdot n^2}\frac{n^2a^2}{36}-\left(\frac{4n^2-36}{30n^2}\frac{n^2a^2}{36}-\frac{2(n^2-36)}{4!\cdot n^2}\frac{n^2a^2}{36}\right)\frac{2(n^2-36)}{4!\cdot n^2}-\cdots \quad (10.42)$$

(2) 求角中径

$$R=\frac{na}{6}-\frac{na}{6}\frac{n^2-36}{24n^2}-\left(\frac{na}{6}\frac{9n^2-36}{80n^2}-\frac{na}{6}\frac{n^2-36}{24n^2}\right)\frac{n^2-36}{24n^2}-\cdots \quad (10.43)$$

(3) 求距 m 面斜弦

当 $m\geqslant 3$ 时，

$$a_m=ma+2\{-9\times[(m-1)^2+(m-3)^2]\}\div(2!n^2)+2\{-9n^2\times[(m-1)^2+(m-3)^2]+81\times[(m-1)^4+(m-3)^4]\}\div(4!n^4)+2\{-36n^4\times[(m-1)^2+(m-3)^2]+405n^2\times[(m-1)^4+(m-3)^4]-729\times[(m-1)^6+(m-3)^6]\}\div(6!n^6)+\cdots \quad (10.44)$$

当 $m=2$ 时，$(m-1)^{2k}+(m-3)^{2k}(k\in\mathbf{N})$ 只计算 $(m-1)^{2k}$，其等于 1。

2) 求方率的捷术

首先给出“太阴率”，即伯努利数列：

甲率 $= B_1 = \dfrac{1}{6}$，乙率 $= B_2 = \dfrac{1}{60}$，丙率 $= B_3 = \dfrac{1}{42}$，丁率 $= B_4 = \dfrac{1}{40}$，戊率 $= B_5 = \dfrac{5}{198}$，…

(1) 求角中径 R

$$R = \frac{na}{2\pi}\left\{1 + (2-1)B_1\left(\frac{\pi}{n}\right)^2 + (2^3-1)B_2\left(\frac{\pi}{n}\right)^4 + (2^5-1)B_3\left(\frac{\pi}{n}\right)^6 + \cdots\right\}$$

$$= \frac{a}{2}\left(\frac{n}{\pi}\right)\left\{1 + \sum_{k=1}^{\infty}(2^{2k-1}-1)B_k\left(\frac{\pi}{n}\right)^{2k}\right\} \tag{10.45}$$

(2) 求平中径 r

$$r = \frac{na}{2\pi}\left\{1 - 4B_1\left(\frac{\pi}{n}\right)^2 - 4^2B_2\left(\frac{\pi}{n}\right)^4 - 4^3B_3\left(\frac{\pi}{n}\right)^6 - \cdots\right\}$$

$$= \frac{a}{2}\left(\frac{n}{\pi}\right)\left\{1 - \sum_{k=1}^{\infty}4^kB_k\left(\frac{\pi}{n}\right)^{2k}\right\} \tag{10.46}$$

(3) 求距 m 面弦 a_m

$$a_m = a\left\{m - \sigma_2\left(\frac{\pi}{n}\right)^2 + \frac{1}{3\cdot 4}\sigma_4\left(\frac{\pi}{n}\right)^4 - \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\sigma_6\left(\frac{\pi}{n}\right)^6 + \cdots\right\}$$

$$= a\left\{m + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\sigma_{2k}}{(2k)!}\left(\frac{\pi}{n}\right)^{2k}\right\} \tag{10.47}$$

其中：$\sigma_{2k} = (m-1)^{2k} + (m-3)^{2k} + (m-5)^{2k} + \cdots,\ k \in \mathbf{N}$

3) 圆充方

主要是边 a，距 m 面斜弦 a_m，距 m 面斜矢 h_m 关于角数 n，直径 d，距数 m 的级数展开。

(1) 求角面 a

$$a = \frac{3d}{n}\left[1 + \frac{1}{2^2\cdot 3!}\left(\frac{n^2-36}{n^2}\right) + \frac{1}{2^4\cdot 5!}\left(\frac{n^2-36}{n^2}\right)\left(\frac{9n^2-36}{n^2}\right) + \cdots\right]$$

$$= \frac{3d}{n}\left[1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(4k+2)!!}\prod\frac{(2k-1)^2n^2-36}{n^2}\right] \tag{10.48}$$

(2) 求距 m 面斜弦 a_m

$$a_m=\frac{3d}{n}\left[1+\frac{1}{2^2\cdot 3!}\left(\frac{n^2-36m^2}{n^2}\right)+\frac{1}{2^4\cdot 5!}\left(\frac{n^2-36m^2}{n^2}\right)\left(\frac{9n^2-36m^2}{n^2}\right)+\frac{1}{2^6\cdot 7!}\left(\frac{n^2-36m^2}{n^2}\right)\left(\frac{9n^2-36m^2}{n^2}\right)\left(\frac{25n^2-36m^2}{n^2}\right)+\cdots\right]$$

$$=\frac{3d}{n}\left[1+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(4k+2)!!}\prod_{i=1}^{k}\frac{(2i-1)^2n^2-36m^2}{n^2}\right] \tag{10.49}$$

(3) 求距 m 面斜矢 h_m

$$h_m=\frac{9m^2d}{4n^2}\left[1+\frac{2}{4!}\left(\frac{n^2-9m^2}{n^2}\right)+\frac{2}{6!}\left(\frac{n^2-9m^2}{n^2}\right)\left(\frac{4n^2-9m^2}{n^2}\right)+\frac{2}{8!}\left(\frac{n^2-9m^2}{n^2}\right)\left(\frac{4n^2-9m^2}{n^2}\right)\left(\frac{9n^2-9m^2}{n^2}\right)+\cdots\right]$$

$$=\frac{9m^2d}{4n^2}\left[1+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+2)!}\prod_{i=1}^{k}\frac{i^2n^2-9m^2}{n^2}\right] \tag{10.50}$$

4) 弧中截斜

主要是距 m 斜矢 h_m、距 m 斜弦 a_m 关于角数 n、直径 $d=2R$、距数 m、弧矢 h、弧弦 a 的级数展开。

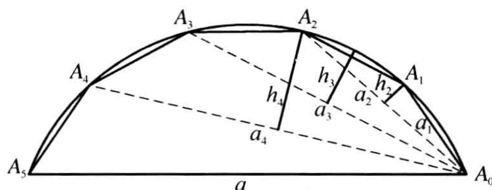


图 10.18

如图 10.18，设角数为 n，直径为 $d=2R$，距数 m，距 m 面斜弦为 a_m，距 m 面斜矢为 h_m，弧矢为 h，弧弦为 a，则依次求下列两级数。

(1) 求距 m 面斜矢 h_m

$$h_m=\frac{hm^2}{n^2}\left[1+\frac{2}{4!}\left(\frac{2h}{R}\right)\left(\frac{n^2-m^2}{n^2}\right)+\frac{2}{6!}\left(\frac{2h}{R}\right)^2\left(\frac{n^2-m^2}{n^2}\right)\left(\frac{4n^2-m^2}{n^2}\right)+\frac{2}{8!}\left(\frac{2h}{R}\right)^3\left(\frac{n^2-m^2}{n^2}\right)\left(\frac{4n^2-m^2}{n^2}\right)\left(\frac{9n^2-m^2}{n^2}\right)+\cdots\right]$$

$$=\frac{hm^2}{n^2}\left[1+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+2)!}\left(\frac{2h}{R}\right)^k\prod_{i=1}^{k}\frac{i^2n^2-m^2}{n^2}\right] \tag{10.51}$$

(2) 求距 m 面斜弦 a_m

$$a_m=\frac{ma}{n}\left[1+\frac{1}{3!}\left(\frac{2c}{R}\right)\left(\frac{n^2-m^2}{n^2}\right)+\frac{1}{5!}\left(\frac{2c}{R}\right)^2\left(\frac{n^2-m^2}{n^2}\right)\left(\frac{4n^2-m^2}{n^2}\right)+\right.$$

$$\left.\frac{1}{7!}\left(\frac{2c}{R}\right)^3\left(\frac{n^2-m^2}{n^2}\right)\left(\frac{4n^2-m^2}{n^2}\right)\left(\frac{9n^2-m^2}{n^2}\right)+\cdots\right]$$

$$=\frac{ma}{n}\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!}\left(\frac{2h}{R}\right)^k\prod_{i=1}^{k}\frac{i^2n^2-m^2}{n^2}\right] \tag{10.52}$$

《方圆算经》同样没有给出这些方率公式的推演过程。

和算圆理研究的出发点从最初就循着求弧长与求球积两条路线发展，建部贤弘对弧长公式的研究导致了三角函数的幂级数展开的研究，关孝和求球积方法的发展导致了定积分方法的建立。1726 年，松永良弼著《立圆率》，主要是计算球冠体积与球体积的问题，他将村松茂清与关孝和的“削片法”使用到无穷情形，正式使用了极限概念和方法。设球的直径为 d，球冠的矢（高）为 h，用平行平面将矢分割 n 等分（如图 10.19），过等分点作平行的弦 a_i，各弦对应的矢为 h_i，其计算球冠体积算法的步骤如下：

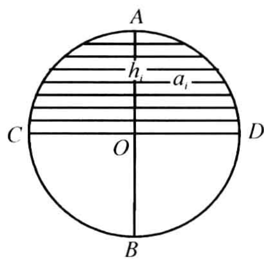


图 10.19　求球体积的碎抹法

(1) 求各弦幂之和

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^2=\sum_{i=1}^{n}4h_i(d-h_i)=4\left[d\frac{h}{n}\sum_{i=1}^{n}i-\left(\frac{h}{n}\right)^2\sum_{i=1}^{n}i^2\right]$$

(2) 求通积

$$V'=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2+a_{i+1}^2}{2}\cdot\frac{h}{n}=\frac{1}{3}\left(6h^2d-4h^3-\frac{2h^3}{n^2}\right)$$

(3) 求球缺之约积

$$V''=\lim_{n\to\infty}V'=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(6h^2d-4h^3-\frac{2h^3}{n^2}\right)=\frac{1}{3}(6h^2d-4h^3)$$

（4）求球缺之定积

$$V_g = \frac{\pi}{4}V'' = \frac{\pi}{12}(6h^2 d - 4h^3) \tag{10.53}$$

他令 $h = d/2$，这样得到半球体积

$$\overline{V} = \frac{\pi}{12}\left(6\frac{d^2}{4}d - 4\frac{d^3}{8}\right) = \frac{\pi}{12}d^3 \tag{10.54}$$

在第（3）步的计算中，松永指出：

> 以片数除矢为厚，自之，以矢相乘，倍之得数以减寄位，余为三段通积，更细锲之。片数至多者，厚数甚少也，以甚少之厚数乘矢，则其数至微也，至微之极以无为限，故约去厚幂相乘，为立圆阙约积也[1]。

明确提出了极限的概念，与今天的定积分算法完全一致。松永良弼的《方圆算经》及山路主住考订的《玉积真术》（作者、年代不详）都记录了此积分算法。其后，安岛直圆（Ajima Naonobu，1733～1800）与和田宁（Wata Yasushi，1787～1840）循着这一发展路线，获得了重积分算法以及具有一般性的积分算法（圆理豁术）。

10.7　安岛直圆的弧背术与二次圆理缀术

安岛直圆被称做"和算中兴之祖"，和算圆理算法由于他的工作而出现转折，全面进入积分算法时代。其圆理研究成果主要反映在《弧背术解》（年代不详）、《圆柱穿空圆术》（1794）、《圆柱穿空圆术起源》（年代不详）、《湾背解术》（1797）、《十字环真术》（1794）等稿本中。弧背术即相当于反三角函数级数展开法，安岛采用定积分算法进行级数展开，与以前建部贤弘、松永良弼、久留岛义太以及宅间流的展开方式不同，以前展开方式都是将弧若干等份，直接求弧长，而他是将弦若干等份，先求弓形面积，再求弧长。设弧的直径为 d，弦长为 a，求弧长 p。安岛的做法如下：

---

〔1〕 松永良弼. 立圆率[A]. 平山諦，内藤淳編. 松永良弼[C]. 松永良弼刊行会. 東京：東京法令出版株式会社，1987：81.

首先如图 10.20(a),将把弧 p 对应的弦 a 进行 $2n$ 等分,$\frac{a}{n}=\Delta$,称作子,则

$$丑\ 2\Delta=\frac{2a}{n},\ 寅\ 3\Delta=\frac{3a}{n},\ 卯\ 4\Delta=\frac{4a}{n},\ 辰\ 5\Delta=\frac{5a}{n},\ \cdots$$

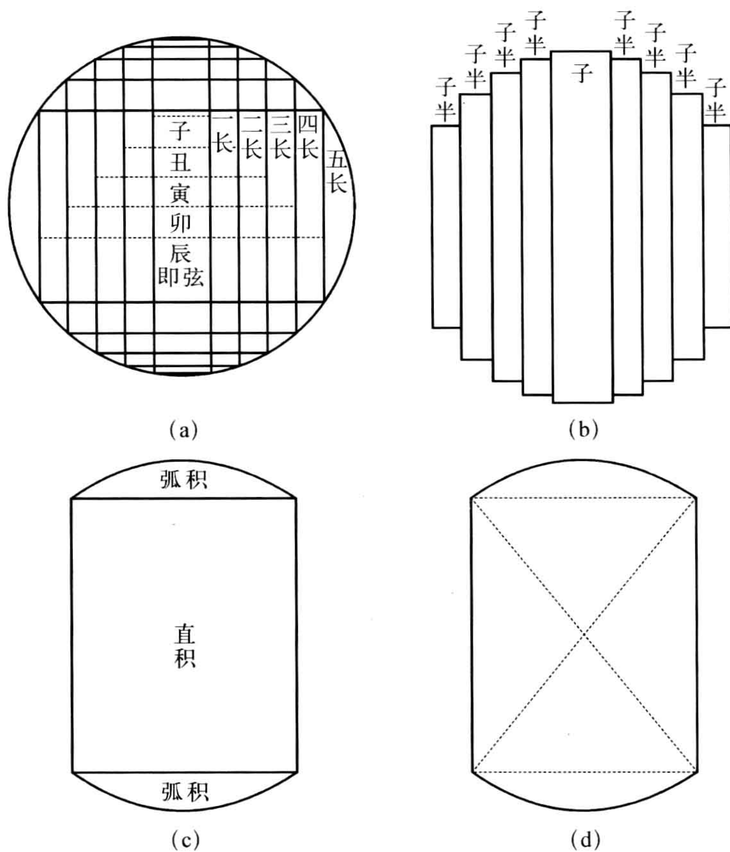


图 10.20

于是,根据勾股定理可求出过等分点的各纵弦长,即

$$一长\ b_1=\sqrt{d^2-\Delta^2}=\sqrt{d^2-\left(\frac{a}{n}\right)^2}=d\sqrt{1-\left(\frac{a}{d}\right)^2\left(\frac{1}{n}\right)^2}$$

$$二长\ b_2=\sqrt{d^2-(2\Delta)^2}=\sqrt{d^2-\left(\frac{2a}{n}\right)^2}=d\sqrt{1-\left(\frac{a}{d}\right)^2\left(\frac{2}{n}\right)^2}$$

$$三长\ b_3=\sqrt{d^2-(3\Delta)^2}=\sqrt{d^2-\left(\frac{3a}{n}\right)^2}=d\sqrt{1-\left(\frac{a}{d}\right)^2\left(\frac{3}{n}\right)^2}$$

$$k\text{ 长 } b_k = \sqrt{d^2-(k\Delta)^2} = \sqrt{d^2-\left(\frac{ka}{n}\right)^2} = d\sqrt{1-\left(\frac{a}{d}\right)^2\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

利用开方缀术对各长进行二项式展开，得到

$$\text{一长 } b_1 = d\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{d}\right)^2\left(\frac{1}{n}\right)^2-\frac{1}{8}\left(\frac{a}{d}\right)^4\left(\frac{1}{n}\right)^4-\frac{3}{48}\left(\frac{a}{d}\right)^6\left(\frac{1}{n}\right)^6-\frac{15}{384}\left(\frac{a}{d}\right)^8\left(\frac{1}{n}\right)^8-\frac{105}{3\ 840}\left(\frac{a}{d}\right)^{10}\left(\frac{1}{n}\right)^{10}-\cdots\right]$$

$$\text{二长 } b_1 = d\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{d}\right)^2\left(\frac{2}{n}\right)^2-\frac{1}{8}\left(\frac{a}{d}\right)^4\left(\frac{2}{n}\right)^4-\frac{3}{48}\left(\frac{a}{d}\right)^6\left(\frac{2}{n}\right)^6-\frac{15}{384}\left(\frac{a}{d}\right)^8\left(\frac{2}{n}\right)^8-\frac{105}{3\ 840}\left(\frac{a}{d}\right)^{10}\left(\frac{2}{n}\right)^{10}-\cdots\right]$$

$$\text{三长 } b_1 = d\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{d}\right)^2\left(\frac{3}{n}\right)^2-\frac{1}{8}\left(\frac{a}{d}\right)^4\left(\frac{3}{n}\right)^4-\frac{3}{48}\left(\frac{a}{d}\right)^6\left(\frac{3}{n}\right)^6-\frac{15}{384}\left(\frac{a}{d}\right)^8\left(\frac{3}{n}\right)^8-\frac{105}{3\ 840}\left(\frac{a}{d}\right)^{10}\left(\frac{3}{n}\right)^{10}-\cdots\right]$$

$$k\text{ 长 } b_1 = d\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{d}\right)^2\left(\frac{k}{n}\right)^2-\frac{1}{8}\left(\frac{a}{d}\right)^4\left(\frac{k}{n}\right)^4-\frac{3}{48}\left(\frac{a}{d}\right)^6\left(\frac{k}{n}\right)^6-\frac{15}{384}\left(\frac{a}{d}\right)^8\left(\frac{k}{n}\right)^8-\frac{105}{3\ 840}\left(\frac{a}{d}\right)^{10}\left(\frac{k}{n}\right)^{10}-\cdots\right]$$

对上面系列级数进行叠加，得

$$\sum_{i=1}^{n} b_i = d\left[\sum_{i=1}^{n}1-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{d}\right)^2\frac{\sum_{i=1}^{n}i^2}{n^2}-\frac{1}{8}\left(\frac{a}{d}\right)^4\frac{\sum_{i=1}^{n}i^4}{n^4}-\frac{3}{48}\left(\frac{a}{d}\right)^6\frac{\sum_{i=1}^{n}i^6}{n^6}-\frac{15}{384}\left(\frac{a}{d}\right)^8\frac{\sum_{i=1}^{n}i^8}{n^8}-\frac{105}{3\ 840}\left(\frac{a}{d}\right)^{10}\frac{\sum_{i=1}^{n}i^{10}}{n^{10}}-\cdots\right]$$

用垛积术求出各级乘方垛的和式 $\sum_{i=1}^{k} i^r$，并代入各级中，得

$$\sum_{i=1}^{n} b_i = n-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{d}\right)^2\frac{\frac{1}{6}(2n^3+3n^2+n)}{n^2}-$$

$$\frac{1}{8}\left(\frac{a}{d}\right)^4\frac{\frac{1}{30}(6n^5+15n^4+10n^3-n)}{n^4}-$$

$$\frac{3}{48}\left(\frac{a}{d}\right)^6\frac{\frac{1}{42}(6n^7+21n^6+21n^5-7n^3+n)}{n^6}-$$

$$\frac{15}{384}\left(\frac{a}{d}\right)^8\frac{\frac{1}{90}(10n^9+45n^8+60n^7+42n^5+20n^3-3n)}{n^8}-$$

$$\frac{105}{3\,840}\left(\frac{a}{d}\right)^{10}\frac{\frac{1}{66}(6n^{11}+33n^{10}+55n^9-66n^7+66n^5-33n^3+5n)}{n^{10}}-\cdots$$

图 10.20(b)的图形面积为 $S'=\Delta\sum_{i=1}^{n}b_i$，于是，“带直弧形”即图 10.20(c)的图形面积为 $S=\lim_{n\to\infty}S'$(安岛明确指出：“若截数至多之极数，则子者至少之极数也。于是，积形为上下弧积而中带直形之象”[1])。因 $k\Delta=a$，代入以上式，并整理得

$$S'=\Delta\sum_{i=1}^{n}b_i=ad+\frac{1}{12}\left(-\frac{2a^3d}{d^2}-\frac{3a^2d\Delta}{d^2}-\frac{ad\Delta^2}{d^2}\right)+$$
$$\frac{1}{240}\left(-\frac{6a^5d}{d^4}-\frac{15a^4d\Delta}{d^4}-\frac{10a^3d\Delta^2}{d^4}+\frac{ad\Delta^4}{d^4}\right)+$$
$$\frac{3}{2\,016}\left(-\frac{6a^7d}{d^6}-\frac{21a^6d\Delta}{d^6}-\frac{21a^5d\Delta^2}{d^6}+\frac{7a^3d\Delta^4}{d^6}-\frac{ad\Delta^6}{d^6}\right)+$$
$$\frac{15}{34\,560}\left(-\frac{10a^9d}{d^8}-\frac{45a^8d\Delta}{d^8}-\frac{60a^7d\Delta^2}{d^8}+\frac{42a^5d\Delta^4}{d^8}-\right.$$
$$\left.\frac{20a^3d\Delta^6}{d^8}+\frac{3ad\Delta^8}{d^8}\right)+\frac{105}{253\,440}\left(-\frac{6a^{11}d}{d^{10}}-\frac{33a^{10}d\Delta}{d^{10}}-\frac{55a^9d\Delta^2}{d^{10}}+\right.$$
$$\left.\frac{66a^7d\Delta^4}{d^{10}}-\frac{66a^5d\Delta^6}{d^{10}}+\frac{33a^3d\Delta^8}{d^{10}}-\frac{5ad\Delta^{10}}{d^{10}}\right)+\cdots$$

当截数 n 趋向无穷时，子(Δ)趋于 0，上式中略去含 Δ 的项[2]，整理得：

---

[1] 安岛直円. 弧背術解[A]. 见：徐泽林译注. 和算选粹[C]. 北京：科学出版社，2008：469.

[2] 对此极限过程，安岛直圆解释道：“截数至多，则子至少矣。至少之极数者，空也。故第一行有形，而第二行以下皆尽而为空，即带直弧积之真数也。”

$$S = \lim_{k \to \infty} S' = ad - \frac{1}{6}\frac{a^3}{d} - \frac{1}{40}\frac{a^5}{d^3} - \frac{3}{336}\frac{a^7}{d^5} - \frac{15}{3\ 456}\frac{a^9}{d^7} - \frac{105}{42\ 240}\frac{a^{11}}{d^9} - \cdots$$

又中间“直”的面积 S_1 等于弦与 k 长之积(五子与五长之积)，即

$$S_1 = (k\Delta)b_k = k\Delta d - \frac{1}{2}\frac{d\ (k\Delta)^3}{d^2} - \frac{1}{8}\frac{d\ (k\Delta)^5}{d^4} - \frac{3}{48}\frac{d\ (k\Delta)^7}{d^6} - \frac{15}{384}\frac{d\ (k\Delta)^9}{d^8} - \frac{105}{3\ 840}\frac{d\ (k\Delta)^{11}}{d^{10}} - \cdots$$

$$= ad - \frac{1}{2}\frac{da^3}{d^2} - \frac{1}{8}\frac{da^5}{d^4} - \frac{3}{48}\frac{da^7}{d^6} - \frac{15}{384}\frac{da^9}{d^8} - \frac{105}{3\ 840}\frac{da^{11}}{d^{10}} - \cdots$$

又因扇形面积为 $S_2 = \frac{1}{4}pd$，弧长 $p = \frac{4S_2}{d}$，所以

$$p = \frac{2S - S_1}{d} = a + \frac{1}{6}\frac{a^3}{d^2} + \frac{3}{40}\frac{a^5}{d^4} + \frac{5}{112}\frac{a^7}{d^6} + \frac{35}{1\ 152}\frac{a^9}{d^8} + \frac{63}{2\ 816}\frac{a^{11}}{d^{10}} + \cdots$$

进一步将系数递推关系整理如下：

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{(2n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)}\left(\frac{a^2}{d^2}\right)$$

最后，又给出内元率形式的背数级数展开式：

$$p = 2\sqrt{hd}\left[1 + \frac{1^2}{3!}\left(\frac{h}{d}\right) + \frac{1^2 \cdot 3^2}{5!}\left(\frac{h}{d}\right)^2 + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{7!}\left(\frac{h}{d}\right)^3 + \cdots\right] \tag{10.55}$$

在安岛直圆的上述方法中，把各长 $b_k = \sqrt{d^2 - (k\Delta)^2}$ 进行级数展开，为第一次缀术；再将这系列的无穷级数进行叠加，即 $\Delta\sum_{i=1}^{n} b_i$，便是第二次缀术，所以他的方法被和算家称作“二次圆理缀术”，相当于二重积分。

安岛直圆还用他的二次缀术解决求圆穿空圆柱的体积计算问题，即已知原圆柱的直径为 D，用一个直径为 d 的圆柱与之直交相穿，求直交部分(穿去积)的体积 V(如图 10.21)。其方法载于其稿本著作《圆柱穿空圆术》、《圆柱穿空圆术解》与《圆柱穿空圆术起源》之中。这是和算中所谓的“穿去

问题”，其渊源可追溯到关孝和的相关研究[1]以及青山利永(Aoyama Toshinaga，生卒年不详)的《中学算法》(1719)。安岛直圆用二次缀术方法，成功地解决了这样的问题，相当于独自求出二重积分

$$V=\int_0^d \mathrm{d}z\int_0^{\sqrt{d^2-z^2}}\sqrt{D^2-y^2}\,\mathrm{d}y$$

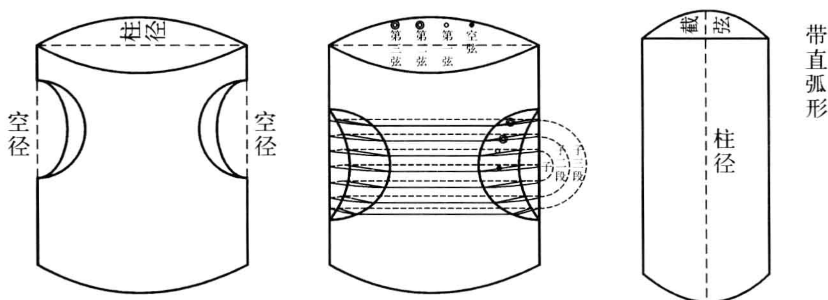


图 10.21　圆柱穿空圆图

安岛直圆给出两种解法，《圆柱穿空圆术》与《圆柱穿空圆术解》给出第一种解法：

首先用平行于两圆柱轴所在平面之诸平行平面截穿去体，每个截口是带直弧形。求这些带直弧形的面积(在《弧背术解》中已给出，据此可求)。假令把直交圆柱的直径 d 进行 $2n$ 等分，令 $\dfrac{d}{n}=h$(子)，求与之直交的各弦 a_k，即第 k 弦幂为 $a_k^2=d^2-(kh)^2$，利用“缀术”进行级数展开，求各弦：

$$\begin{aligned}a_k&=\sqrt{d^2-(kh)^2}\\&=d\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{kh}{d}\right)^2-\frac{1}{8}\left(\frac{kh}{d}\right)^4-\frac{1}{16}\left(\frac{kh}{d}\right)^6-\frac{5}{128}\left(\frac{kh}{d}\right)^8-\cdots\right]\end{aligned}$$

将它们逐一代入带直弧积公式：

$$S=aD-\frac{1}{6}\frac{a^3}{D}-\frac{1}{40}\frac{a^5}{D^3}-\frac{1}{112}\frac{a^7}{D^5}-\frac{5}{1\,152}\frac{a^9}{D^7}-\frac{7}{2\,816}\frac{a^{11}}{D^9}-\cdots$$

---

〔1〕 小林龍彦，田中薫. 和算における穿去題について——関孝和の穿去題の研究とその継承[J]. 科学史研究. 1983(147)：154－159.

此公式记作以下形式：

$$S_k = {}_kA_0 - {}_kA_1 - {}_kA_2 - {}_kA_3 - \cdots - {}_kA_m - \cdots$$

原数 ${}_kA_0 = D\sqrt{d^2-(kh)^2}$

$$= Dd\left\{1-\frac{1}{2}\left(\frac{kh}{d}\right)^2-\frac{1}{8}\left(\frac{kh}{d}\right)^4-\frac{1}{16}\left(\frac{kh}{d}\right)^6-\frac{5}{128}\left(\frac{kh}{d}\right)^8-\cdots\right\}$$

一差 ${}_kA_1 = \frac{1}{6D}\left(\sqrt{d^2-(kh)^2}\right)^3$

$$= \frac{d^3}{6D}\left\{1-\frac{3}{2}\left(\frac{kh}{d}\right)^2+\frac{3}{8}\left(\frac{kh}{d}\right)^4+\frac{1}{16}\left(\frac{kh}{d}\right)^6+\cdots\right\}$$

二差 ${}_kA_2 = \frac{1}{40D^3}\left(\sqrt{d^2-(kh)^2}\right)^5 = \frac{d^5}{40D^3}\left\{1-\frac{5}{2}\left(\frac{kh}{d}\right)^2+\cdots\right\}$

…　　…　　…

求其和 $\sum_{k=1}^{n} S_k$（又一次缀术），乘以 $h=\frac{d}{n}$，并取 $n\to\infty$的极限，得各差中各 $\frac{d^{2p+2}}{D^{2p-1}}$ 的系数，由此进一步归纳出系数的一般规律，即得

$$V=\lim_{n\to\infty}\frac{d}{n}\sum_{k=1}^{n}S_k=\frac{\pi}{4}Dd^2\left[1-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdots(2k-3)^2(2k-1)}{4^2\cdot 6^2\cdot 8^2\cdots(2k)^2(2k+2)}\left(\frac{d}{D}\right)^{2k}\right]$$

《圆柱穿空圆术起源》与《算法考草》给出第种二解法，此法与前一法之不同在于，安岛改用平行于原圆柱轴的等距离 $d/(2n)$ 的平行平面去截这个直交体，每一截口都是矩形，两边长分别是 $\sqrt{D^2-(kh)^2}$，$\sqrt{d^2-(kh)^2}$　（其中$\frac{d}{n}=h$，$k=1, 2, 3, \cdots, n$），各截口之面积为 $S_k=\sqrt{[D^2-(kh)^2][d^2-(kh)^2]}$，以厚 $h/2$ 乘各截口面积，并叠加，得

$$V'=\sum_{k=1}^{n}\frac{h}{2}S_k=\frac{h}{2}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{[D^2-(kh)^2][d^2-(kh)^2]}$$

根据“缀术”，将$\sqrt{[D^2-(kh)^2][d^2-(kh)^2]}$ 进行指数为$\frac{1}{2}$的二项级数

展开,再求和,利用垛积公式,并取极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+3^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\frac{1}{p+1}$$

最后得到"真空积"V的无穷级数形式的公式:

$$V=\int_0^d\sqrt{(D^2-x^2)(d^2-x^2)}\,\mathrm{d}x$$

$$=Dd^2\sum_{k=1}^{n}(-1)^n\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}\left(\frac{d}{D}\right)\int_0^1 t^{2n}\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$$

安岛直圆的方法成为圆理研究的普遍方法之后,和算中的穿去问题也逐渐增多并日益复杂化[1][2],在幕末和算书中,这类问题十分丰富,详细内容请参阅加藤平左卫门的《圆理及行列式》[3]。

10.8 和田宁的圆理豁术与积分数值表

和田宁,通称丰之进,字子永,号算学、圆象、豁通等,曾奉仕于播州三日月藩[4],后入芝三缘山增上寺,并且还是京都土御门家[5]的算学顾问。他生性恬淡,淡泊名利,生活极为贫困,除教授算学外,他为生计还教授书法与易学。他是日下诚(Kusaka Makoto, 1764~1839)的弟子中最杰出者,也是幕末最有创造力和影响力的数学家。他的著述颇多,有外传36卷,内传30卷,可惜这些著述因天保七年(1836)的火灾而烧失殆尽,所以今天很难见到他的著作。目前可知者有《创制豁术初问》、《方理顺逆法》、《原反术知》、《圆理唇口》、《殆将算法》、《圆理顺逆小成》、《圆理法线》、《椭圆应周表》、《圆弧率海》、《求积增约初门》、《截背术》、《犖题解例》、《濡圆求积》、《创制异圆算法》等。

〔1〕 徐泽林,张娜. 中国刊刻的第一本和算著作《算法圆理括囊》[J]. 中国科技史杂志. 2007,28(1):34-45.
〔2〕 小林龍彦,田中薫. 算額にあらわれた穿去問題について[J]. 数学史研究. 1981(90):1.
〔3〕 加藤平左衛門. 圓理及行列式[M]. 東京:開成館,1944:448-467.
〔4〕 今兵库县佐用郡佐用町三日月。
〔5〕 土御门家,是仕于朝廷的公家,负责朝廷的阴阳道与天文历算学方面的工作。

随和田宁学圆理方法的和算家很多，主要有小出兼政（Koide Kanemasa，1797～1865）、浜崎一致（Hamazaki Ichichi，生卒年不详）、谷义直（Tani Yoshinao，生卒年不详）、不破直温（Fuwa Naoharu，生卒年不详）、白石长忠（Shiraishi Nagatada，1795～1862）、小泉则之（Koizumi Noriyuki，生卒年不详）、栗田宜贞（Kurida Yoshitei，生卒年不详）、栗山德一（Kuriyama Tokuichi，生卒年不详）、川井久德（Kawai Hisanori，1766～?）、内田五观（Uchida Itsumi，1805～1882）、松山寿平（Matsuyama Juhei，生卒年不详）、中村信忠（Nakamura Nobutada，生卒年不详）、长谷川茂基（Hasegawa Shigeki，生卒年不详）、本桥惟义（Motohashi Koreyoshi，1815～1889，后来改名福田泉）、彦坂永贞（Hikosaka Nagasada，生卒年不详）、古川谦（Furukawa Ken，生卒年不详）、岩崎义三郎（Iwasaki Yoshisaburo，生卒年不详）等人。其圆理成果由弟子们著述整理而广为传播，内田五观的《圆理阐微表》、《豁术通解》、《古今算鉴》、《算法圆理初发》，小出兼政的《圆理算经》[1]等书的内容，实际上都是和田宁的圆理研究成果。另外，内田久命（Uchida Kyumei，？～1868）《算法求积通考》（1844）反映的也基本是和田宁的圆理内容。

安岛直圆建立的积分法基本上还是针对具体问题求解的，和田宁对圆理方法进行了系统的总结，把它发展到新的高度。首先他建立了几何求积的一般化方法，以解决各类复杂图形的求积问题，其圆理方法被称作圆理豁术；其次，他花费大量时间与精力，制作了一系列相当于定积分公式与微分公式的"叠表"（统称为圆理表），以用于曲边形体的求积，其成果载于《圆理诸表》。

10.8.1　和田宁的圆理豁术

小出兼政撰著的《圆理算经》（图 10.22）基本上都是和田宁的圆理

---

〔1〕《圆理算经》的编著者小出兼政，通称长十郎，字修喜. 宽政九年（1797）8 月生于德岛，文政二年（1819）获宫城流皆传，文政九年（1826）六月入和田宁之门，同年八月师从日下诚，受关流宗统皆传，另受最上流传书百余卷。文政十二年（1829）随关流大家和田宁受圆理豁术，故而自称为"四流兼学"（宫城流、关流、最上流、和田圆理学）。天保五年（1834）入土御门家，学习天文历法，天保七年任职师范代，并晋为"准学头"。著作颇多，门徒有福田泉等，庆应元年（1865）8 月 17 日殁，享年 69 岁，法号修算院自达居士，葬于德岛市寺町善学寺。《圆理算经》没有刊刻，以抄本形式流传。

研究成果，分上、中、下三卷，前面另加“统元之卷”。统元之卷为总论，内容包括太极、两算、两仪四源三则、外传四健六巧、内传三术、诸象、八问、术之八病、技之八烦、内题五题、卷中总载方圆二法。上卷内容是应用圆理表的若干例题，包括应用应率八态表三例、应用方理（直线形体的积分计算问题）表及叠率四成表三例、应用开方溟式出商表（即级数反演）两例、应用方圆合法及叠率见飞表五例。中卷是应用方理和圆理求积的 9 个例题，即“括圭象式”二例、“括方象式”二例、杂题五例。下卷罗列诸表，包括各类数列（颊毛率、凤翼率）、应率八态表、应率八象表、方理诸表、叠率四成表、圆率与圆弧积线表（圆周率及弧长的级数展开式）、开方溟式出商表、较率成表（即整式函数的微分）、叠率见飞表（即无理函数的积分）。

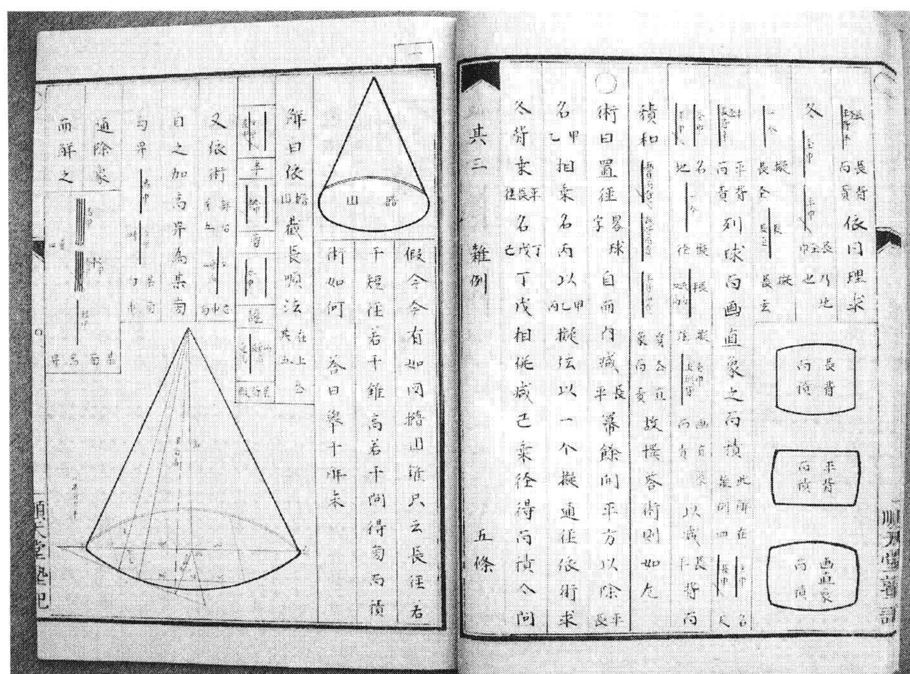
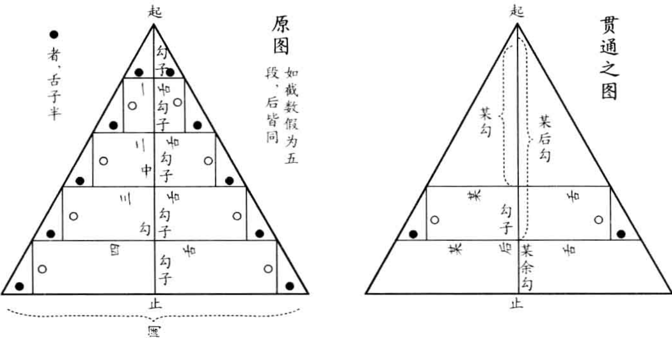


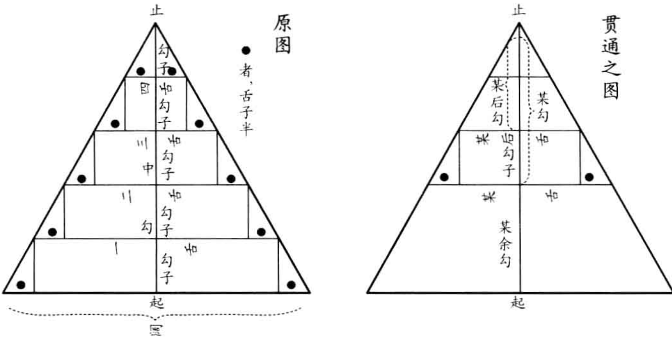
图 10.22 《圆理算经》中的圆理算法

和田宁建立了分割图形的若干方式。对于“方理”，给出三角形、梯形的不同分割方式，如图 10.23(a)～(e)。

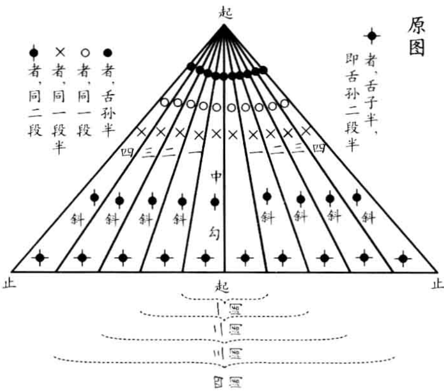
对于“圆理”，给出 4 种基本截法：截径法、截弦法、截矢法以及截弧法，如图 10.24(a)～(d)。



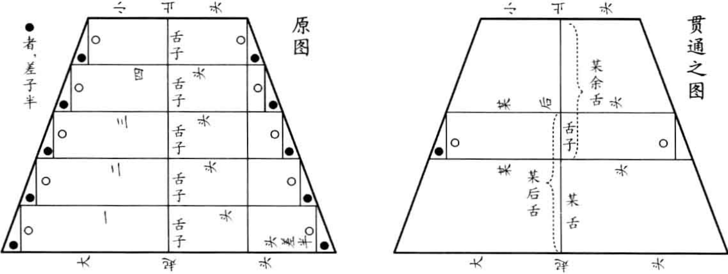
(a) 圭象正割顺法之图



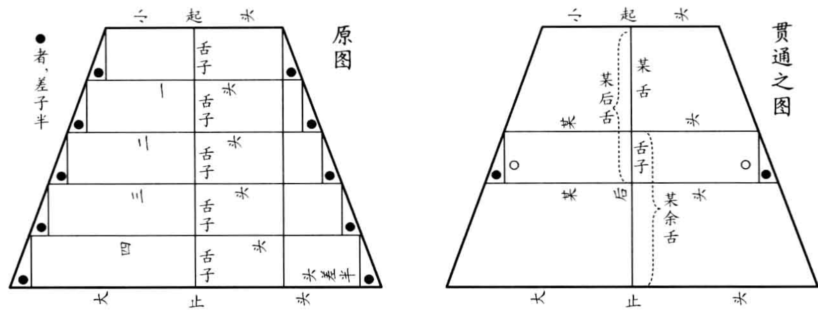
(b) 圭象正割逆法之图



(c) 圭形角割顺法之图

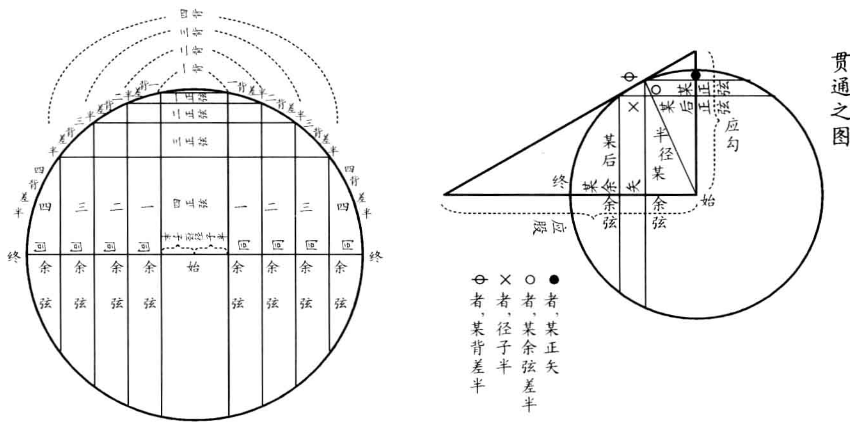


(d) 梯象正割顺法之图

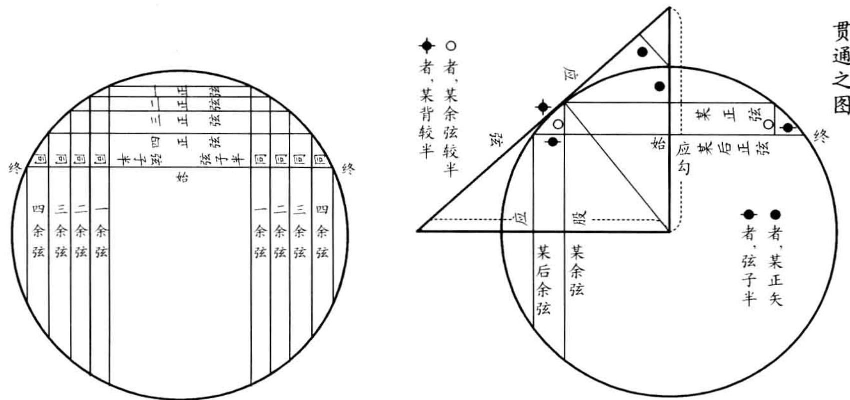


(e) 梯象正割逆法之图

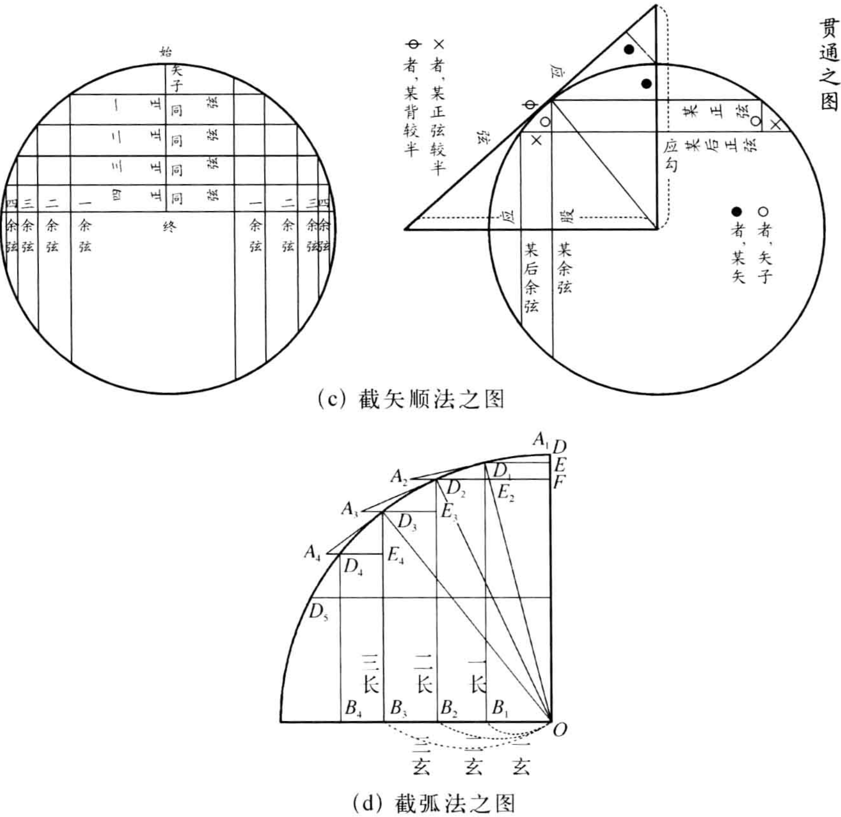
图 10.23 方理图形分割法



(a) 截径顺法之图



(b) 截弦顺法之图



(c) 截矢顺法之图

(d) 截弧法之图

图 10.24　圆理图形分割法

在以上各种分割方式中，根据图形的特征采用不同的分割方式，都沿某个方向把图形中的某类线段分割 n 等分，n 称作截数，其中 k $(k \leqslant n)$ 被称作某段，再根据几何性质求出函数 $f\left(\frac{k}{n}\right)$ 及其叠加和(若被分割的直径、弦、矢等线段的长度为 s，则 $\frac{s}{n} = \Delta x$，$\frac{k}{n} = x$)，在此基础上进一步求各类积。和田宁的圆理豁术具有一般性，与今天的定积分算法无异。

例如，等分直径为 d 的圆的直径，每一等分称作"子"，从直径一端往中间计数，过第 k 个等分点的图如图 10.25 所示，过该等分点作"某长"(b_k)、"某弦"(a_k)，即对应的两方向的弦，"次长"为 a_{k+1}，则 $b_{k+1}-b_k$ 为"某长较"，对应地有"某背较"。计算"某

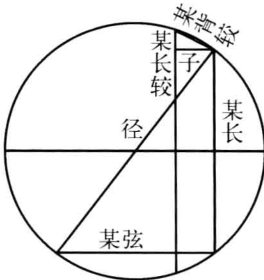


图 10.25　圆理豁术图

背较”方法如下：

$$子 = \frac{d}{n}, 某弦 = \frac{k}{n}d, 某长 = d\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

$$某长较 = d\frac{k}{n^2}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}}, 某背较 = \frac{d}{n}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}}。$$

根据这些“微元”可以计算圆面积与圆周长，即计算出

$$\begin{aligned}圆面积 S &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} 某长 \times 子 = d^2 \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2} \\ &= d^2\left(1-\frac{1}{6}-\frac{1}{40}-\frac{1}{112}-\frac{5}{1\ 152}-\cdots\right) = \frac{\pi}{4}d^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}圆周长 C &= 2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} 某背较 = 2d\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}} \\ &= 2d\left(2-\frac{1}{3}-\frac{1}{20}-\frac{1}{56}-\frac{5}{576}-\cdots\right) = \pi d\end{aligned}$$

在以上计算过程中，需要使用圆理表。

圆理豁术使圆理计算在处理复杂图形时有径可寻，更为有效，因此幕末和算内容中圆理内容最为丰富，图形也日益复杂，包括圆理极数术、转矩轨迹（即摆线）、濡圆（也是摆线）、异圆、回圆等。不完全统计，以下幕末和算书中的圆理，都是使用圆理豁术的：

《异圆算法》（和田宁，1825）

《濡圆求积》（和田宁，年代不详）

《社盟算谱》（白石长忠，1826）

《五明算法后集》（家崎善之，1826）

《方圆究理》（家崎善之，1828）

《算法杂俎》（岩井重远，1830）

《算法圆理鉴》（斋藤宜义，1834）

《算法瑚琏》（小林忠良，1836）

《揭楣算法》（堀池久道，1836）

《豁机算法》(志野知乡,1837)
《圆理冰释》(岩井重远,1837)
《探赜算法》(剑持章行,1840)
《算法圆理新新》(斋藤宜义,1840)
《求积通考》(内田久命,1844)
《圆理三台》(佐藤雪山,1846)
《顺天堂算谱》(福田理轩,1847)
《算法圆理括发》(竹内修敬,1851)
《算法圆理括囊》(加悦俊兴,1852)
《尖圆豁通》(桑本正明,1855)
《数理神篇》(斋藤宜义,1860)
《方圆鉴》(萩原信芳,1862)
《算法圆理私论》(萩原信芳,1866)
《圆理算要》(萩原信芳,1878)

10.8.2　和田宁创制的圆理表

和田宁编制一系列的圆理计算表格,使几何求积变得简明,按照今天的话说,是以无穷级数的形式构造了,形如 $x^m(1-x)^n$, $x^m(1-x^2)^n$ 函数在[0,1]区间上的积分表和微分表,用于处理各类几何形体的求积问题。其圆理表主要记录在《圆理诸表》、《圆理阐微表》等书中,小出兼政的《圆理算经》中也收录了一部分(如图 10.26)。

和田宁采用《易纬》中的一些概念与术语,命名无穷分割中的各种数量。把图形分割 n 等分时,n 被称做截数,k 被称做某段,$\frac{1}{n}$ 称做初,$\frac{k}{n}$ 称做应,$1-\frac{k}{n}$ 称做健(又称做东与见),$1-\frac{2k}{n}$ 称做贯,$1+\frac{k}{n}$ 称做西,$1-\left(\frac{k}{n}\right)^2$ 称做龙(又称做南),$1+\left(\frac{k}{n}\right)^2$ 称做北,$1-\left(\frac{k}{n}\right)^4$ 称做泉。函数的幂指数 m 是奇数时称做阴,是偶数时称做阳,$m=4t$, $m=4t+1$, $m=4t+2$, $m=4t+3$ 时,分别称做太阳、少阴、少阳、太阴。这些圆理表系统,主要由以下 17 类构成。

象			顺			阳少			象离
形七	形六	形五	形四	形三	形二	形一			
阳商一二	阳商一〇	阳商八	阳商六	阳商四	阳商再	阳商	查级		阳商乘表
一	一	一	一	一	一	一	通一	原数	
〇一三	〇一一	〇九	〇七	〇五	〇三	〇一	通乘鬼率 白点者奇率 通除二	一差	率
〇一四三	〇九九	〇六三	〇三五	〇一五	〇三	● 乘一 一 以下通	通乘鬼率幂 白点者二连奇率 通除八	二差	阳
〇一二八七	〇六九三	〇三一五	〇一〇五	〇一五	● 乘三 一 以下通	● 三	通乘鬼率再 白点者三连奇率 通除四八	三差	率者以一个为多极
〇九〇〇九	〇三四六五	〇九四五	〇一〇五	● 乘一五 一 以下通	● 三	● 一五	通乘鬼率三 白点者四连奇率 通除三八四	四差	
〇四五〇四五	〇一〇三九五	〇九四五	● 乘一〇五 一 以下通	● 三	● 一五	● 一〇五	通乘鬼率四 白点者五连奇率 通除三八四〇	五差	
同前	同前	同前	同前	同前	同前	黑点者逐连奇率			

图 10.26 《圆理算经》中的"阳商乘表"

1）应率八态表

指 $(1\pm x)^n$ 与 $(1\pm x)^{-n}$ 的无穷级数展开式。其中 x 称做"率"，$1-x$ 称做"阳"，$1+x$ 称做"阴"。共有八式，分别如下：

(1.1) 离态，阳乘表：$(1-x)^n$ ；

(1.2) 坤态，阴乘表：$(1+x)^n$ ；

(1.3) 巽态，乘象对和表：$(1+x)^n+(1-x)^n$ ；

(1.4) 艮态，乘象对较表：$(1+x)^n-(1-x)^n$ ；

(1.5) 乾态，阳除表：$(1-x)^{-n}$ ；

(1.6) 坎态，阴除表：$(1+x)^{-n}$ ；

(1.7) 兑态，除象和表：$(1-x)^{-n}+(1+x)^{-n}$ ；

(1.8) 震态，除象较表：$(1-x)^{-n}-(1+x)^{-n}$。

2）应率八象表

即 $(1\pm x)^{\frac{n}{2}}$ 与 $(1\pm x)^{-\frac{n}{2}}$ 的级数展开式，包括：

(2.1) 离象，阳商乘表：$(\sqrt{1-x})^{2n+1}=1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{D_{2n+1}^k}{2^k}x^k$；

(2.2) 坤象，阴商乘表：$(\sqrt{1+x})^{2n+1}=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{D_{2n+1}^k}{2^k}x^k$；

(2.3) 巽象，乘象对和表：$(\sqrt{1-x})^{2n+1}+(\sqrt{1+x})^{2n+1}=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{D_{2n+1}^{2k}}{2^{2k}}x^{2k}$；

(2.4) 艮象，乘象对较表：$(\sqrt{1+x})^{2n+1}-(\sqrt{1-x})^{2n+1}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{D_{2n+1}^{2k-1}}{2^{2k-1}}x^{2k-1}$；

(2.5) 乾象，阳商除表：$(\sqrt{1-x})^{-(2n+1)}=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{D_{(2n+1)+2(k-1)}^k}{2^k}x^k$；

(2.6) 坎象，阴商除表：$(\sqrt{1+x})^{-(2n+1)}=1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{D_{(2n+1)+2(k-1)}^k}{2^k}x^k$；

(2.7) 兑象，除象对和表：

$$(\sqrt{1-x})^{-(2n+1)}+(\sqrt{1+x})^{-(2n+1)}=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{D_{(2n+1)+2k}^{2k}}{2^{2k}}x^{2k}\text{；}$$

(2.8) 震象，除象对较表：

$$(\sqrt{1-x})^{-(2n+1)}-(\sqrt{1+x})^{-(2n+1)}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{D_{(2n+1)+4(k-1)}^{2k-1}}{2^{2k-1}}x^{2k-1}\text{。}$$

3) 极率八象表

在应率八象表中，率 $x=1$ 之极限情形的数表。

(3.1) 离象表：$(1-x)^{\frac{2n+1}{2}}$ 的无穷级数展开式中，将率 $x=1$ 时的级数各项列成的表；

(3.2) 坤象表：$(1+x)^{\frac{2n+1}{2}}$ 的无穷级数展开式中，将率 $x=1$ 时的级数各项列成的表；

(3.3) 巽象表：$(1-x)^{\frac{2n+1}{2}}+(1+x)^{\frac{2n+1}{2}}$ 的无穷级数展开式中，将率 $x=1$ 时的级数各项列成的表；

(3.4) 艮象表：$(1+x)^{\frac{2n+1}{2}}-(1-x)^{\frac{2n+1}{2}}$ 的无穷级数展开式中，将率 $x=1$ 时的级数各项列成的表；

(3.5) 乾象表：$(1-x)^{-\frac{2n+1}{2}}$ 的无穷级数展开式中，将率 $x=1$ 时的级数各项列成的表；

(3.6) 坎象表：$(1+x)^{-\frac{2n+1}{2}}$ 的无穷级数展开式中，将率 $x=1$ 时的级数

各项列成的表；

(3.7) 兑象表：$(1-x)^{-\frac{2n+1}{2}}+(1+x)^{-\frac{2n+1}{2}}$ 的无穷级数展开式中，将率 $x=1$ 时的级数各项列成的表；

(3.8) 震象表：$(1-x)^{-\frac{2n+1}{2}}-(1+x)^{-\frac{2n+1}{2}}$ 的无穷级数展开式中，将率 $x=1$ 时的级数各项列成的表。

4) 顺生率变步表

即衰垜数列的变态表，包括：

① 顺生率元表；② 顺生率变步表；③ 顺生率次变步表。

5) 开方通义精表

由二项式级数展开式的系数构成的表，表示以下各函数的泰勒级数展开式：

(5.1) 阳商乘通表：$(1-x)^{\frac{1}{n}}$ 的展开式；

(5.2) 阳 k 乘方商乘表：$(1-x)^{\frac{n}{k+1}}$ 的展开式；

(5.3) 阳商除通表：$(1-x)^{-\frac{1}{n}}$ 的展开式；

(5.4) 阳 k 乘方商除表：$(1-x)^{-\frac{n}{k+1}}$ 的展开式；

(5.5) 阴商乘通表：$(1+x)^{\frac{1}{n}}$ 的展开式；

(5.6) 阴商除通表：$(1+x)^{-\frac{1}{n}}$ 的展开式。

6) 应率商朓四象表

率用 x 表示，称 $1-\sqrt{1-x}$ 为阳商朓，称 $\sqrt{1+x}-1$ 为阴商朓，即 $(1-\sqrt{1-x})^n$ 与 $(\sqrt{1+x}-1)^n$ 的级数展开式，包括：

(6.1) 商朓太阳表：$(1-\sqrt{1-x})^{2n}$ 的展开式；

(6.2) 商朓少阴表：$(\sqrt{1+x}-1)^{2n}$ 的展开式；

(6.3) 商朓少阳表：$(1-\sqrt{1-x})^{2n+1}$ 的展开式；

(6.4) 商朓太阴表：$(\sqrt{1+x}-1)^{2n+1}$ 的展开式。

7) 九成草表

即 $\int_0^1 x^n \mathrm{d}x$ 的展开公式，包括：

(7.1) 叠元表，即 $\int_0^1 t^p \mathrm{d}t$ 的数值表，若记 $I(p,\ q)=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p\left(\frac{1}{n}\right)^q$，当 $q\leqslant 0$ 时，$I(p,\ q)=\infty$；当 $q\geqslant 2$ 时，$I(p,\ q)=0$；当 $q=1$ 时，

$I(p, q) = \int_0^1 t^p \mathrm{d}t = \dfrac{1}{p+1}$；

(7.2) 叠阳表，即 $\int_0^1 t^{2p} \mathrm{d}t$ 的数值表，若记 $I(2p, q) = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{k}{n}\right)^{2p}\left(\dfrac{1}{n}\right)^{q}$，当 $q \leqslant 0$ 时，$I(2p, q) = \infty$；当 $q \geqslant 2$ 时，$I(2p, q) = 0$；当 $q = 1$ 时，$I(2p, q) = \int_0^1 t^{2p} \mathrm{d}t$；

(7.3) 叠阴表，即 $\int_0^1 t^{2p+1} \mathrm{d}t$ 的数值表，若记 $I(2p, q) = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{k}{n}\right)^{2p}\left(\dfrac{1}{n}\right)^{q}$，当 $q \leqslant 0$ 时，$I(2p+1, q) = \infty$；当 $q \geqslant 2$ 时，$I(2p+1, q) = 0$；当 $q = 1$ 时，$I(2p+1, q) = \dfrac{1}{2p+1}$；

(7.4) 太阳表，即 $\int_0^1 t^{4p} \mathrm{d}t$ 的数值表；

(7.5) 少阴表，即 $\int_0^1 t^{4p+1} \mathrm{d}t$ 的数值表；

(7.6) 少阳表，即 $\int_0^1 t^{4p+2} \mathrm{d}t$ 的数值表；

(7.7) 太阴表，即 $\int_0^1 t^{4p+3} \mathrm{d}t$ 的数值表；

(7.8) 虚表，即 $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{k}{n}\right)^{-m} \to \infty$；

(7.9) 空表，即 $\dfrac{1}{n^{1+\lambda}}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{k}{n}\right)^{-m} \to 0$。

8) 九成真表

即 $\int_0^1 x^{\frac{1}{2}+m} \mathrm{d}x = \dfrac{2}{2m+3}$ 的系列展开公式，包括：

(8.1) 叠元真表：$\int_0^1 x^{\frac{1}{2}+m} \mathrm{d}x$ 的展开式，即 $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\dfrac{k}{n}\right)^{\frac{1}{2}+m} = \dfrac{2}{2m+3}$；

(8.2) 叠阳真表：$\int_0^1 x^{\frac{1}{2}+2m} \mathrm{d}x$ 的展开式；

(8.3) 叠阴真表：$\int_0^1 x^{\frac{1}{2}+2m+1} \mathrm{d}x$ 的展开式；

(8.4) 太阳真表：$\int_0^1 x^{\frac{1}{2}+4m}\mathrm{d}x$ 的展开式；

(8.5) 少阴真表：$\int_0^1 x^{\frac{1}{2}+4m+1}\mathrm{d}x$ 的展开式；

(8.6) 少阳真表：$\int_0^1 x^{\frac{1}{2}+4m+2}\mathrm{d}x$ 的展开式；

(8.7) 太阴真表：$\int_0^1 x^{\frac{1}{2}+4m+3}\mathrm{d}x$ 的展开式；

(8.8) 除叠真表：即 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k}{n}\right)^{-\frac{1}{2}-m}$ 的展开式；

(8.9) 叠元真简表：即 $\int_0^1 x^m\mathrm{d}x$ 的展开式纵式排列表。

9) **极率东南表**

即 $\int_0^1 x^m(1-x)^n\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^1 x^m(1-x^2)^n\mathrm{d}x$ 的系列展开公式，其中：$1-\frac{k}{n}$ 称做东；$1+\frac{k}{n}$ 称做西；$1-\frac{k^2}{n^2}$ 称做南；$1+\frac{k^2}{n^2}$ 称做北。包括：

(9.1) 东表：$\int_0^1 x^m(1-x)^n\mathrm{d}x$ 的展开式；

(9.2) 东商表：$\int_0^1 x^m(1-x)^{\frac{1}{2}+n}\mathrm{d}x$ 的展开式；

(9.3) 东除虚表：$\int_0^1 x^m(1-x)^{-n}\mathrm{d}x=\infty$；

(9.4) 东商除表：$\int_0^1 x^m(1-x)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$ 的展开式；

(9.5) 南阳表：$\int_0^1 x^{2m}(1-x^2)^n\mathrm{d}x$ 的展开式；

(9.6) 南阴表：$\int_0^1 x^{2m+1}(1-x^2)^n\mathrm{d}x$ 的展开式；

(9.7) 南商阳表：$\int_0^1 x^{2m}(1-x^2)^{\frac{1}{2}+n}\mathrm{d}x$ 的展开式；

(9.8) 南商阴表：$\int_0^1 x^{2m+1}(1-x^2)^{\frac{1}{2}+n}\mathrm{d}x$ 的展开式；

(9.9) 南除虚表：$\int_0^1 x^m(1-x^2)^{-n}\mathrm{d}x=\infty$ 的展开式；

(9.10) 南商除阳表：$\int_0^1 x^{2m}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$ 的展开式；

(9.11) 南商除阴表：$\int_0^1 x^{2m+1}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$ 的展开式。

10) 六龙三阳表

即 $\int_0^1 x^m(1-x)^n\mathrm{d}x$，$\int_0^1 x^m(1-x^2)^n\mathrm{d}x$ 及 $\int_0^1 x^m(1-x^4)^n\mathrm{d}x$ 的系列无穷级数展开式，包括：

(10.1) 健表：$\int_0^1 x^m(1-x)^n\mathrm{d}x$ 的展开式；

(10.2) 健商表：$\int_0^1 x^m(1-x)^{\frac{1}{2}+n}\mathrm{d}x$ 的展开式；

(10.3) 健除虚表：$\int_0^1 x^m(1-x)^{-n}\mathrm{d}x$ 的展开式；

(10.4) 健商除表：$\int_0^1 \frac{x^m}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x$ 的展开式；

(10.5) 龙阳表：$\int_0^1 x^{2m}(1-x^2)^n\mathrm{d}x$ 的展开式；

(10.6) 龙阴表：$\int_0^1 x^{2m+1}(1-x^2)^n\mathrm{d}x$ 的展开式；

(10.7) 龙商阳表：$\int_0^1 x^{2m}(1-x^2)^{\frac{1}{2}+n}\mathrm{d}x$ 的展开式；

(10.8) 龙商阴表：$\int_0^1 x^{2m+1}(1-x^2)^{\frac{1}{2}+n}\mathrm{d}x$ 的展开式；

(10.9) 龙阴虚表：$\int_0^1 x^m(1-x^2)^{-n}\mathrm{d}x$ 的展开式；

(10.10) 龙商除阳表：$\int_0^1 \frac{x^{2m}}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$ 的展开式；

(10.11) 龙商除阴表：$\int_0^1 \frac{x^{2m+1}}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$ 的展开式；

(10.12) 泉表：$\int_0^1 x^m(1-x^4)^n\mathrm{d}x$ 的展开式；

(10.13) 泉商太阳表：$\int_0^1 x^{4m}(1-x^4)^{\frac{1}{2}+n}\mathrm{d}x$ 的展开式；

(10.14) 泉商少阴表：$\int_0^1 x^{4m+1}(1-x^4)^{\frac{1}{2}+n}\mathrm{d}x$ 的展开式；

(10.15) 泉商少阳表：$\int_0^1 x^{4m+2}(1-x^4)^{\frac{1}{2}+n}\mathrm{d}x$ 的展开式；

(10.16) 泉商太阴表：$\int_0^1 x^{4m+3}(1-x^4)^{\frac{1}{2}+n}\mathrm{d}x$ 的展开式；

(10.17) 泉除虚表：$\int_0^1 x^m(1-x^4)^{-n}\mathrm{d}x$ 的展开式；

(10.18) 泉商除太阳表：$\int_0^1 \frac{x^{4m}}{\sqrt{1-x^4}}\mathrm{d}x$ 的展开式；

(10.19) 泉商除少阴表：$\int_0^1 \frac{x^{4m+1}}{\sqrt{1-x^4}}\mathrm{d}x$ 的展开式；

(10.20) 泉商除少阳表：$\int_0^1 \frac{x^{4m+2}}{\sqrt{1-x^4}}\mathrm{d}x$ 的展开式；

(10.21) 泉商除太阴表：$\int_0^1 \frac{x^{4m+3}}{\sqrt{1-x^4}}\mathrm{d}x$ 的展开式。

11) 见飞变原真表

即积分变换表，把以上积分表中的变量 x 换成 $1-x, x^2, x^4$ 时所得到的关系式，包括：

(11.1) 见变原表，即 $\int_0^1 x^{\frac{1}{2}+m}(1-x)^n\mathrm{d}x=\int_0^1 x^n(1-x)^{\frac{1}{2}+m}\mathrm{d}x$；

(11.2) 其次变表，即 $\int_0^1 x^{m+\frac{1}{2}}(1-x)^n\mathrm{d}x=2\int_0^1 x^{2m+2}(1-x^2)^m\mathrm{d}x$；

(11.3) 其三变表，即 $\int_0^1 x^{m+\frac{1}{2}}(1-x)^n\mathrm{d}x=2\int_0^1 x^{2n+1}(1-x^2)^{m+\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$；

(11.4) 见商变源表，即 $\int_0^1 x^{m+\frac{1}{2}}(1-x)^{n+\frac{1}{2}}\mathrm{d}x=2\int_0^1 t^{2n+2}(1-t^2)^{m+\frac{1}{2}}\mathrm{d}t$；(将 x 换成 t^2)

(11.5) 见商除变源表，即 $\int_0^1 x^{m+\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$

$$=2\int_0^1 t^{2m+2}(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t \text{（将 } x \text{ 换成 } t^2\text{）}$$

(11.6) 龙变原真表，即 $\int_0^1 x^{m+\frac{1}{2}}(1-x^2)^n\mathrm{d}x=2\int_0^1 t^{2m+2}(1-t^4)^n\mathrm{d}t$（将 x 换成 t^2）

(11.7) 龙商变原阳表、(11.8) 龙商变原阴表，即

$$\int_0^1 x^{m+\frac{1}{2}}(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}\mathrm{d}x=2\int_0^1 t^{2m+2}(1-t^4)^{n+\frac{1}{2}}\mathrm{d}t \text{（将 } x \text{ 换成 } t^2\text{）}$$

(11.9) 龙商除变原阳表、(11.10)龙商除变原阴表，即

$$\int_0^1 x^{m+\frac{1}{2}}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x = 2\int_0^1 t^{2m+2}(1-t^4)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t \text{（将 } x \text{ 换成 } t^2\text{）}$$

12) 七较草表

即 x^n 的微分数值表，包括：

(12.1) 较元表：即 $\left(\frac{k}{n}\right)^m$ 的较，等于 $m\frac{k^{m-1}}{n^m}$。若设 $\frac{k}{n}=x$，$\frac{1}{n}=\mathrm{d}x$，则此表相当于 $mx^{m-1}\mathrm{d}x = m\frac{k^{m-1}}{n^m}$；

(12.2) 较阳表：在较元表中，$m=2t-1$ 的情形；

(12.3) 较阴表：在较元表中，$m=2t$ 的情形；

(12.4) 太阳表：在较元表中，$m=4t$ 的情形；

(12.5) 少阴表：在较元表中，$m=4t+1$ 的情形；

(12.6) 少阳表：在较元表中，$m=4t+2$ 的情形；

(12.7) 太阴表：在较元表中，$m=4t+3$ 的情形。

13) 九成较真表

即 $x^{m+\frac{1}{2}}$ 的微分数值表，包括：

(13.1) 元较真表：即 $\left(\frac{k}{n}\right)^{m+\frac{1}{2}}$ 的较，等于 $\frac{2m+1}{2}\left(\frac{k}{n}\right)^{m-\frac{1}{2}}\frac{1}{n}$；

(13.2) 阳较真表：在元较真表中，$m=2t-1$ 的情形；

(13.3) 阴较真表：在元较真表中，$m=2t$ 的情形；

(13.4) 太阳较真表：在元较真表中，$m=4t$ 的情形；

(13.5) 少阴较真表：在元较真表中，$m=4t+1$ 的情形；

(13.6) 少阳较真表：在元较真表中，$m=4t+2$ 的情形；

(13.7) 太阴较真表：在元较真表中，$m=4t+3$ 的情形；

(13.8) 除较真表：即 $\left(\frac{k}{n}\right)^{-m-\frac{1}{2}}$ 的较；

(13.9) 元较真简表：元较真简表的另外形式。

14) 健飞较表

即 $x^n(1-x)^m$ 的微分数值表，包括：

(14.1) 健较表：即 $\left(\frac{k}{n}\right)^m\left(1-\frac{k}{n}\right)^p$ 的较，等于 $\frac{m}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{m-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)^p-$

$\frac{p}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{m}\left(1-\frac{k}{n}\right)^{p-1}$；

（14.2）健商较表：即 $\left(\frac{k}{n}\right)^{m}\left[\sqrt{1-\frac{k}{n}}\right]^{p}$ 的较；

（14.3）健除较表：即 $\left(\frac{k}{n}\right)^{m}\left[\sqrt{1-\frac{k}{n}}\right]^{-p}$ 的较；

（14.4）龙较表：即 $\left(\frac{k}{n}\right)^{m}\left(1-\frac{k^{2}}{n^{2}}\right)^{p}$ 的较；

（14.5）龙商较表：即 $\left(\frac{k}{n}\right)^{m}\left[\sqrt{1-\frac{k^{2}}{n^{2}}}\right]^{p}$ 的较；

（14.6）龙除较表：即 $\left(\frac{k}{n}\right)^{m}\left(1-\frac{k^{2}}{n^{2}}\right)^{-p}$ 的较。

15）极率贯表

包括：

（15.1）贯叠表：即 $\frac{1}{n}\left(1-\frac{2k}{n}\right)^{m}\left(1-\frac{k}{n}\right)^{p}$ 的叠数表，也即 $\int_{0}^{1}(1-2x)^{m}x^{p}\mathrm{d}x$ 的展开式；

（15.2）贯变源表，即 $\frac{1}{n}\int_{0}^{1}x^{m}(1-2x)^{n}\mathrm{d}x=(-1)^{n}\lambda_{m,n}\int_{0}^{1}t^{n}(1-t)^{m}\mathrm{d}t$ 的变换公式；

（15.3）贯较表，即 $\left(\frac{k}{n}\right)^{m}\left(1-\frac{2k}{n}\right)^{r}$ 的一阶微分表，即

$$\frac{m}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{m-1}\left(1-\frac{2k}{n}\right)^{r}-\frac{2r}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{m}\left(1-\frac{2k}{n}\right)^{r-1}$$

16）应率六神表

为级数运算的递推表，设圆直径为 1 的弧长 p，对应的弦为 a，则 6 个表意义如下：

（16.1）青龙表：$p(1-a)^{m+\frac{1}{2}}$ 的数表；

（16.2）朱雀表：$\frac{(1-a)^{m+\frac{1}{2}}}{(2m+1)!!}$ 的数表；

（16.3）勾陈表：记 $\frac{(2m-1)!!a^{m}}{(2m+1)!}=A_{m}$，$\lambda_{1}=1$，$\lambda_{2}=\frac{1-a}{3}\lambda_{1}-A_{1}$，$\lambda_{k}=$

$\frac{1-a}{(2k-1)}\lambda_{k-1}+(-1)^{k-1}A_{k-1}$，则 $(-1)^{k}\left\{\frac{(1-a)^{\frac{(2k-1)}{2}}}{(2k-1)!!}-\lambda_{k}\right\}$ 的系列数表；

(16.4) 腾蛇表：记 $\lambda_{k}=\frac{1}{(2k+1)}a^{k}$，$A_{1}=1$，$A_{k}=(1-a)A_{k-1}+(-1)^{k-1}\lambda_{k-1}$，则 $(-1)^{k}\{p(1-a)^{\frac{2k-1}{2}}-A_{k}\}$ 的系列数表；

(16.5) 白虎表：$\frac{1}{(1-a)^{\frac{1}{2}+k}}\frac{1}{(2k)!!}$ 的数表；

(16.6) 玄武表：记 $\eta_{1}=\frac{p}{\sqrt{1-a}}\sqrt{1-a}$，$\eta_{k}=\frac{(2k-3)}{1-a}\eta_{k-1}+\frac{(2k-4)!!}{\sqrt{1-a}}$ 的数表。

17) 无尽式开出商表

即级数反演公式，首先给出“开方三原溟式”：

(17.1) 原溟元式：$0=(-k)+x+ax^{2}+bx^{3}+cx^{4}+dx^{5}+\cdots$

(17.2) 原溟阳式：$0=(-k)+x+bx^{3}+dx^{5}+fx^{7}+hx^{9}+\cdots$

(17.3) 原溟阴式：$0=(-k)+ax^{2}+cx^{4}+ex^{6}+gx^{8}+\cdots$

用系数 $k, a, b, c, d, e, f, g, h, \cdots$ 表示以上三式的解 x，分别得到以下 3 个反演式：

(17.1)′ 元式出商表：

$$x=k-ak^{2}+(2a-b)k^{3}+(-5a^{3}+5ab-c)k^{4}+(3b^{2}+14a^{4}-21a^{2}b+6ac-d)k^{5}+\cdots$$

(17.2)′ 阳式出商表：

$$x=k-ak^{2}+2a^{2}k^{3}+(-5a^{3}-c)k^{4}+(14a^{3}+6ac)k^{5}+(-52a^{5}-28a^{2}c-e)k^{6}+\cdots$$

(17.3)′ 阴式出商表：

$$x=k-bk^{3}+(3b^{2}-d)k^{5}+(-12b^{2}+8bd-f)k^{7}+(5d^{2}+55b^{4}-55db^{2}+10bf-h)k^{9}+\cdots$$

幕末圆理计算中普遍采用和田宁的圆理表及其编制方法，各类算书中一般都有圆理表的推算方法，例如，千叶胤秀(Chiba Tanehide，1775～1849)编著的《算法新书》中推算“奇偶除表”、“奇偶乘表”(图 10.27)，过程如下：

算法新書巻之五

江都　長谷川善左衛門寛　閲

一關　千葉雄七胤秀　編

○方圓立表起原

图 10.27　《算法新书》中的"方圆立表起原"

1）推奇除表和偶除表

设有 $\odot O$ 与 $\odot O_1$，直径分别为 d，d_1，分别将其半径 n 等分（如图 10.28）并过等分点作平行弦 a_i 与 b_i（$i=1, 2, 3, \cdots, n$，下同）。

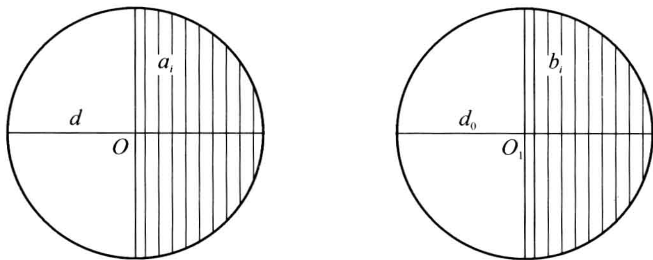


图 10.28

记 $\frac{d_0}{d}=\lambda$，$\frac{i}{n}=x$，$\frac{d}{2n}=\Delta x$，显然有 $b_i^2=d_0^2-i^2\Delta x^2=d_0^2-x^2d_0^2$，

构造　$d_i^2=d^2-\lambda^2x^2d^2$　①

对①是式用开方缀术，得

$$d_i=d\sqrt{1-\lambda^2x^2}=d\left\{1-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-3)!!}{(2k)!!}(\lambda x)^{2k}\right\} \quad ②$$

用归除缀术，式②÷式①，得 $d_i^{-1}=d^{-1}\left\{1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}(\lambda x)^{2k}\right\}$ ③

以式①累除式③，得奇除表

$$\begin{aligned}d_i^{-(2p-1)}&=(d\sqrt{1-\lambda^2x^2})^{-(2p-1)}\\&=d^{-(2p-1)}\left\{1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k+2p-3)!!}{(2k)!!(2p-3)!!}(\lambda^2x^2)^k\right\}\end{aligned} \quad (10.56)$$

（这里定义：当 $r\leqslant 0$ 时，$r!!=1$，下文同）

用归除缀术，式③÷式②，得 d_i^{-2}，并以式①累除之，得偶除表

$$\begin{aligned}d_i^{-2p}&=(d\sqrt{1-\lambda^2x^2})^{-2p}\\&=d^{-2p}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k+2p-2)!!}{(2k)!!}(\lambda^2x^2)^k\end{aligned} \quad (10.57)$$

2）推奇乘表和偶乘表

因为 $b_i^2=d_0^2-x^2d_0^2$，用归除缀术，得

$$b_i = d_0\left\{1-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-3)!!}{(2k)!!}x^{2k}\right\} \quad ④$$

利用垛积术对 b_i 进行叠加，即求 $\sum_{i=1}^{n} b_i$，利用“叠元表”

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{i}{n}\right)^k = \int_0^1 x^k\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k+1}$$

求得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{d_0}{2n}\sum_{i=1}^{n} b_i = d_0^2\left\{1-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-3)!!}{(2k+1)(2k)!!}\right\}$$

于是得 $$\frac{\pi}{4} = \lim_{n\to\infty}\frac{\Delta x\cdot\sum_{i=1}^{n} b_i}{d_0^2} = 1-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-3)!!}{(2k+1)(2k)!!} \quad ⑤$$

对式④累乘 x^2，并叠之求和，得

$$\sum_{k=1}^{n} x^{2p} b_i = d_0\left\{x^{2p}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-3)!!}{(2k)!!}x^{2k+2p}\right\}$$

再使用“叠元表”得 $$\frac{\Delta x\sum_{i=1}^{n} x^{2p} b_i}{d_0^2} = \frac{1}{2p-1}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-3)!!}{(2k+1)(2k)!!} \quad ⑥$$

为简化无穷级数计算，利用无穷小之级数展开式

$$\varepsilon = (1-\delta)\sqrt{1-\delta} = 1-3\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-5)!!}{(2k)!!}\ (\delta\to 1) \quad ⑦$$

式⑤一式⑦，得 $$\frac{\pi}{4} = 4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k-5)!!}{(2k+3)(2k)!!} = \frac{\Delta x\sum_{i=1}^{n} x^2 b_i}{d_1^2}$$

即 $$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k-5)!!}{(2k+3)(2k)!!} = \frac{2}{(2\times 1+2)!!}\,\frac{\pi}{4}$$

由此通过递推得 $$\frac{\Delta x\sum_{i=1}^{n} x^{2p} b_i}{d_1^2} = \frac{2(2p-1)!!}{(2p+2)!!}\,\frac{\pi}{4} \quad (B_0)$$

此等价于积分　$$\int_0^1 x^{2p}\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{2(2p-1)!!}{(2p+2)!!}\frac{\pi}{4} \tag{10.58}$$

以下推奇乘表：

因为　$$\frac{b_i}{d_0^2} - \frac{x^2 b_i}{d_0^2} = \frac{b_i^3}{d_0^4} \tag{⑧}$$

将其叠加求和，得　$$\frac{\Delta x \sum_{i=1}^{n} b_i^3}{d_0^4} = \frac{\Delta x \sum_{i=1}^{n} b_i}{d_0^2} - \frac{\Delta x \sum_{i=1}^{n} x^2 b_i}{d_0^2} \tag{⑨}$$

将式(B_0)代入，得　$$\frac{\Delta x \sum_{i=1}^{n} b_i^3}{d_0^4} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\frac{\pi}{4}$$

对式⑧累乘 $\frac{x^2}{d_0^2}$ 及 b_i^2 而生成　$\dfrac{\Delta x \sum_{i=1}^{n} x^{2p} b_i^{2r-1}}{d_0^{2r}}$

以式(B_0)迭代递推，得奇乘表

$$\frac{\Delta x \sum_{i=1}^{n} x^{2p} b_i^{2r-1}}{d_0^{2r}} = \frac{2(2r-1)!!(2p-1)!!}{(2p+2r)!!}\frac{\pi}{4} \tag{B_1}$$

等价于积分$$\int_0^1 x^{2p}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{2r-1} dx = \frac{2(2p-1)!!(2r-1)!!}{(2p+2r)!!}\frac{\pi}{4} \tag{10.59}$$

以下推求偶乘表：

以 x^2 累乘 $\Delta x \cdot x \cdot b_i$，且叠加求和，得

$$\frac{\Delta x \sum_{i=1}^{n} x^{2p-1} b_i}{d_1^2} = \frac{1}{2p} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-3)}{(2p+2k)(2k)!!} \tag{⑩}$$

利用无穷小级数展开式⑦作推演：

$$1 = 1 - \varepsilon = 1 - \text{式⑦} = 3\frac{\Delta x \sum_{i=1}^{n} x b_i}{d_0^2}，得 \frac{\Delta x \sum_{i=1}^{n} x b_i}{d_0^2} = \frac{1}{3},$$

又以 $2\cdot\dfrac{\Delta x\sum_{i=1}^{n}xb_i}{d_0^2}$ －式⑦，再仿上作迭代递推，得

$$\frac{\Delta x\sum_{i=1}^{n}x^{2p-1}b_i}{d_0^2}=\frac{(2p-2)!!}{(2p+1)!!}$$

利用递推 $\dfrac{\Delta x\sum_{i=1}^{n}x^{2p-1}b_i^{2r-1}}{d_0^{2r}}=\dfrac{\Delta x\sum_{i=1}^{n}x^{2p-1}b_i^{2r-3}}{d_0^{2r-2}}-\dfrac{\Delta x\sum_{i=1}^{n}x^{2p+1}b_i^{2r-3}}{d_0^{2r-2}}$

以式⑨迭代递推，得偶乘表

$$\frac{\Delta x\sum_{i=1}^{n}x^{2p-1}b_i^{2r-1}}{d_0^{2r}}=\frac{(2r-1)!!(2p-2)!!}{(2p+2r-1)!!}\qquad(B_2)$$

偶乘表等价于

$$\int_0^1 x^{2p-1}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{2r-1}\mathrm{d}x=\frac{(2r-1)!!(2p-2)!!}{(2p+2r-1)!!}\qquad(10.60)$$

本章小结

如何认识东西方数学文化传统，特别是无穷小分析的传统？对于这个问题，吴文俊院士曾经对东西方数学进行了比较，他指出：

“西方数学史家往往以希腊式的严密推理相标榜，并以中国数学从来没有达到演绎科学的形式相指责。然而，我们已经看到，在微积分的发明上希腊形式的那种脆弱性以及中国式数学的生命力。某些数学史家例如 Bourbaki 也曾指出，欧几里得的那种系统阻碍了代数学的发展并使之瘫痪。在将 Cavalieri 与阿基米德作比较时，Bourbaki 又指出阿基米德只能得到 Cavalieri 原理很特殊的情况，而与 Cavalieri 作出他的原理用了不很科学的所谓‘证明’相仿，阿基米德为了获得他的特殊情况的‘证明’，也不得不把他著名的所谓阿基米德严密性弃之脑后。我国古代数学并没有发展出一套演绎推理的形式系统，但却另有一套更有生命力的系统。中国古代的劳动人

民向来重视实际，善于从实际中发现问题、提炼问题，进而分析问题、解决问题，在深入广泛实践的基础上建立了世界上最先进的我国古代数学。中国的数学是牢牢扎根于广大劳动人民之中，是导源于劳动人民长期实践经验的基础之上的，这与希腊几何学脱离实际、脱离群众走到纯逻辑推理的形式主义道路是有别的。这正是直至 16 世纪以前我国数学在许多最主要的领域内一直居于最先进地位的根本原因，也是在微积分的发明上中国式的数学远远优越于希腊式数学的根本原因。恩格斯曾经说过：极限的概念，作为微积分的真正基础，对于希腊头脑来说，完全像是一个外国人。

希腊数学中被认为最辉煌的创造之一的无理数论，对于极限来说是华而不实的。而刘徽以至宋代的我国十进位小数的记数法，却与极限概念一衣带水。十进位小数迟至 16 世纪在西欧重被发明以来，直接导致了对数的发明。作为微积分先驱者之一的 Kepler，'广泛应用了对数与十进分数，且热情地传播这发明的知识。'(Cajori，P160)是有一定道理的。面积体积的计算乃是微积分发明的另一重要问题。然而，原来希腊欧几里得以至阿基米德所使用的'穷竭法'是很不得力的，Kepler 用之劳而少功，直到伽利略的学生 Cavalieri 放弃了严密的穷竭法改用粗糙的不可分量法才取得了重大突破。在微积分的创造中起了如此重大作用为西方数学史家盛称的所谓 Cavalieri 原理，事实上早就见之于祖冲之、祖暅父子的著作，即所谓'幂势既同则积不容异'，并具体用之于球体积的计算，比 Cavalieri 原理的发现要早 1 100多年。

微积分的发明从 Kepler 与 Calileo 以至 Leibniz，经历过一段艰苦漫长的过程。上面所举两个例子可以说明发明过程中中国古代数学的作用远优于希腊式的数学，我们甚至不无理由可以这么说，微积分的发明乃是中国式数学战胜了希腊式数学的产物。"〔1〕

吴文俊以上的论述是以西方学者的观点为基础，分析了中国传统数学在代数学、实数理论、无穷小分析等领域的发展情况，从而认为，相对于西方的希腊数学传统，中国古代的数学在无穷分析方面更具优越性。然而，中国古代的无穷小算法在祖冲之父子之后，并未出现进一步的发展，那么，吴文

〔1〕 顾今用. 中国古代数学对世界文化的伟大贡献[J]. 数学学报，1975(1)：20－25.

俊先生的观点是否言过其实呢？

日本文化深受中国文化影响，毋庸置疑，和算当属中国式的数学，它是在中国传统数学的基础上发展起来的，以区域文化整体而言，和算的成就自然也可反映中国数学的一些本质特征，所以我们应当以汉字文化圈的区域文化视角来看待吴文俊先生的上述观点，和算在无穷小分析算法方面的成就为吴先生的精辟论断提供了丰富而有力的证据。

汉字文化圈数学中无穷小算法的背景主要来自四个方面：① 解方程（求一元方程实数根——开方术）中的无穷逼近；② 太阳系天体不规则运动的计算（插值与极值）；③ 有理逼近（调日法与零约术）；④ 几何求积（环矩术与碎抹术）。这些问题起源于中国的数理科学，这四方面的无穷小算法在和算中都有不同程度的发展，在本书的各章中均已揭示。和算家尤其在几何求积方面，建立了具有东方特色的微积分，其发展历程可划分为五个阶段：

① 江户初期的算术近似阶段；

② 关孝和的增约术阶段；

③ 建部贤弘的圆理缀术阶段；

④ 安岛直圆的圆理二次缀术阶段；

⑤ 和田宁的圆理豁术阶段。

和算圆理研究的基本问题是几何度量，刘徽割圆术、阳马术的无穷逼近思想在和算中得到了复兴。在圆周率计算方面，村松茂清、关孝和的算法是赵友钦算法的再现，关孝和、建部贤弘在古典割圆术的基础上引入了数值逼近的技巧；在弧长计算方面，中国传统的招差法这一代数学方法被关孝和、建部贤弘成功地应用于几何计算，它成为和算无穷级数展开研究的起点，建部贤弘在使用招差法的同时，又创造性地应用了等价于 Romberg 算法的累遍增约术与零约术，使和算圆理方法获得了飞跃。另一方面，天元术在和算中的广泛应用，使圆理方法实现代数化成为可能，建部贤弘后来在圆理中引用了开方术，实现了圆理研究的代数化，伴随着和算点窜术的形成与普及，加速了圆理方法代数化的发展，终由松永良弼与久留岛义太建立起无穷级数的代数运算与反演演算。

在计算球体积与球冠体积方面，松永良弼成功地把极限思想和方法引入到村松茂清、关孝和所使用的有限分割算法，其成功的关键在于对乘方垛

垛积公式的应用。松永良弼的定积分算法成为安岛直圆、和田宁圆理方法的基础，尤其是传统垛积术知识在积分运算中发挥着巨大作用。

由此可见，中国传统的无穷小算法，特别是宋元数学中的代数方法、垛积招差术在和算圆理方法形成过程中发挥着重要作用，可以说，和算圆理是以刘徽极限方法为代表的中算微积分思想方法的新发展，它具有鲜明的机械化、程序化的计算数学特色，说明中国传统数学具有强大的生命力，与在西方几何学与三角学的冲击下的中国清代的无穷小算法相比，不能不说清代级数论研究既偏离了传统又落后于西方。

回顾西方微积分思想方法形成的历史，可以发现，希腊雅典的哲人们因为陷于对"无穷"、"无限"观念的迷思，总缺乏建立无穷小算法的勇气，直至亚历山大的阿基米德才有所创造，但他仍然不敢舍弃古代的穷竭法。有别于西方，汉字文化圈的数学家们在无穷小分析方面对待无穷问题的态度，可以说是"为而不言"。例如，松永良弼在《方圆算经》中给出他的一系列无穷级数之前，给出几段"率引"，以《易纬乾凿度》的哲学体系试图对"无穷"、"极限"观念给出理论描述，他说：

> 太易者，初也。数起于初也。太易之前曰之太素，所谓虚也。吾之所不言也者。初之前，不可说也。亦不言也者，人亦不言之也。人之所言也者，有象之后可详也。而亦言之者也，吾亦言之也。夫唯不言也者，圣人亦所不言也。何不言哉也者，问之也，非不言、不可言也[1]。

这一思想很具代表性，反映了东方人对无穷问题常采用"不言"的态度。这样的"不言"，并不是不想言，而是"不可言"，因为东方人注重实际，关心现实问题，只要能够构造出解决问题的有效方法，对何谓"无穷"就不必言了。关孝和、建部贤弘、安岛直圆等大多数和算家，采取和刘徽一样的态度，在无穷小分析上，做而不说，从而在积分法、求极大极小值、实数认识与实数逼近，以及无穷级数展开式研究方面，取得了一系列的成果，达到了文艺复兴时期至牛顿时期欧洲的无穷小算法的水平。

牛顿时代及其以前的半个世纪，欧洲数学家在建立微积分方法时，无穷

---

〔1〕 松永良弼.《方圓算經》引[A]. 见平山諦，内藤淳編. 松永良弼[C]. 松永良弼刊行会. 東京：東京法令出版株式会社，1987.

小算法也是缺乏逻辑基础的，极限概念也没有建立起来，迟至19世纪才建立起极限概念乃至微积分的理论。但近代科学革命时期，欧洲数学家在无穷小分析上与东方人一样，并没有因无穷小算法缺乏逻辑基础而却步不前，否则这方面的知识不会积累起来，微积分学也就不会建立起来。

近代科学中很多划时代的科学思想和方法，可以在东方文化中找到类似的东西，东方人没有建立起具有一般性的微积分方法和理论，并非东方数学自身的原因，而是社会、文化等外部因素造成的，和算无穷小分析的发展也是缺乏建立普遍方法的社会环境与动力。也就是说，微积分学只能在欧洲近代科学革命中产生，并促进欧洲科学革命，但其算法思想与东方数学是一致的。

[General Information]
书名=和算中源　和算算法及其中算源流
作者=徐泽林著
页数=366
SS号=13267044
DX号=
出版日期=2012.11
出版社=上海交通大学出版社

封面
书名
版权
前言
目录
第1章　“演段”的演变与东亚代数方法的发展
1.1　数学史学界对“演段”概念的不同解释
1.2　对宋元数学中“演段”的考察
1.3　对明代数学中“演段”的考察
1.4　对和算中“演段”意义的考察
1.5　“演段”概念的内涵及其演变
1.6　从“演段”概念的演变看东亚代数演算方式的发展及其意义
第2章　代数方程的数值解法：开方术
2.1　中国古代的开方术与增乘开方术
2.2　关孝和的开方术及其与中算家开方术之比较
2.3　中日方程论的成就
2.4　久留岛义太的迭代法
2.5　久留岛义太的执中法
本章小结
第3章　非线性方程组解法：解伏题
3.1　中国的几何代数化传统与消元法
3.2　《算学启蒙》在日传播与天元术的受容
3.3　关孝和的解伏题及其数学机械化特征
3.4　和算家对行列式展开法的改进
3.5　吴方法与和式几何研究
本章小结
第4章　多项式函数插值法：招差术
4.1　函数插值法原理
4.2　中国古代的插值法
4.3　关孝和的累裁招差术
4.4　关孝和的浑沌招差术
4.5　《大成算经》中的方程招差法
4.6　关孝和浑沌招差法的思想来源
4.7　和算中招差法的各种应用
本章小结
第5章　级数求和算法：垛积术
5.1　中国古代的垛积术
5.2　关孝和的垛积术
5.3　其他和算家的垛积术
本章小结
第6章　同余式组与不定方程解法：剪管术与剩一术
6.1　中国剩余定理与大衍总数术

6.2　演纪术及其与求一术的关系
6.3　关孝和的诸约术、剩一术与剪管术
6.4　清代数学家的不定分析研究
第7章　丢番图逼近算法：零约术
7.1　实数的有理逼近法
7.2　中国古代的通其率术与调日法
7.3　关孝和的零约术与和内插方法
7.4　建部贤明的零约术与连分数展开法
7.5　建部贤弘的累约术与重约术
7.6　久留岛义太的平方零约术与周期连分数展开
7.7　和算丢番图逼近算法的中算源流
第8章　极值算法：极数术
8.1　建部贤弘的极数术与久留岛的极数15问
8.2　中国传统历算中的极值概念萌芽
本章小结
第9章　数值加速逼近算法：累遍增约术与Romberg算法
9.1　关于Richardson外推法与Romberg算法
9.2　建部贤弘的累遍增约术与Romberg算法
9.3　关孝和的一遍增约术
9.4　刘徽的“以十二觚幂率消息”探源
第10章　几何求积与无穷级数展开法：圆理缀术
10.1　中国古代数学中的圆理问题
10.2　江户初期的圆理
10.3　关孝和的圆理研究
10.4　建部贤弘的圆理缀术
10.5　宅间流的圆理研究
10.6　久留岛义太与松永良弼等人的圆理研究
10.7　安岛直圆的弧背术与二次圆理缀术
10.8　和田宁的圆理豁术与积分数值表
本章小结